

# Abriss der Mechanik

Rudolf Lehn      Peter Breinfeld<sup>1</sup>

Störck-Gymnasium  
Bad Saulgau

27. Februar 2010

1. E-Mail: [phbrf@t-online.de](mailto:phbrf@t-online.de)      <http://www.pBreinfeld.de>

Das folgende Skript stellt die wichtigsten Gesetze und Rechentechniken zusammen, die bei der Behandlung von Problemen der Mechanik auftreten. Es werden die Mechanik des Massenpunkts und die Mechanik starrer Körper behandelt. Elastische Körper (mit Ausnahme einfacher Beispiele bei Federn) oder die Mechanik der Flüssigkeiten werden in diesem Skript nicht berücksichtigt.

# Inhaltsverzeichnis

- 1 *Mechanik des Massenpunkts* • 7
  - 1.1 *Kinematik* • 7
    - 1.1.1 *Geschwindigkeit und Beschleunigung* • 7
    - 1.1.2 *Zusammensetzung von Bewegungen* • 8
    - 1.1.3 *Wurfbewegungen* • 9
  - 1.2 *Dynamik* • 10
    - 1.2.1 *spezielle Kräfte* • 10
    - 1.2.2 *Beispiel: Bewegung auf der schiefen Ebene* • 13
  - 1.3 *Rotationsdynamik* • 14
    - 1.3.1 *Gleichförmige Kreisbewegung* • 14
    - 1.3.2 *Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung* • 14
    - 1.3.3 *Allgemeine Rotationsbewegung* • 15
    - 1.3.4 *Radialbeschleunigung bei gleichf. Kreisbewegung* • 15
    - 1.3.5 *Trägheitskräfte bei Rotationsbewegungen* • 16
  - 1.4 *Die Erhaltungssätze* • 18
    - 1.4.1 *Arbeit und Energie* • 18
    - 1.4.2 *Leistung* • 20
    - 1.4.3 *Impuls und Stöße* • 20
    - 1.4.4 *Drehimpuls* • 22
  - 1.5 *Gravitation und Planetenbewegung* • 24
    - 1.5.1 *Die Keplerschen Gesetze* • 24
    - 1.5.2 *Energie im Gravitationsfeld* • 25
    - 1.5.3 *Bahngleichung im Gravitationsfeld* • 26
    - 1.5.4 *Gezeitenkräfte* • 31
    - 1.5.5 *Bahnortbestimmung* • 32
- 2 *Der starre Körper* • 38
  - 2.1 *Statik* • 38
    - 2.1.1 *Kräfte* • 38
    - 2.1.2 *Drehmoment* • 39
    - 2.1.3 *Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)* • 40
  - 2.2 *Bewegungsgleichung starrer Körper* • 41

## Inhaltsverzeichnis

- 2.2.1 Winkelgeschwindigkeit und -Beschleunigung • 41
- 2.2.2 Bewegungsgleichung der Translation • 42
- 2.2.3 Bewegungsgleichung der Rotation • 42
- 2.2.4 Rotationsenergie • 43
- 2.2.5 Drehimpuls • 43
- 2.2.6 Translation vs. Rotation • 44
- 2.2.7 Drehimpuls und Drehmoment • 44
- 2.3 Berechnung von Trägheitsmomenten • 45
  - 2.3.1 Steinerscher Satz • 45
  - 2.3.2 Trägheitsmomente ausgewählter Körper • 46
  - 2.3.3 Bestimmung des Trägheitsmoments über Ähnlichkeiten • 49
- 2.4 Kreisel • 49
  - 2.4.1 Kreiselbewegungen • 50
  - 2.4.2 Kräftefreier Kreisel • 50
  - 2.4.3 Eulersche Kreiselgleichungen • 53

# Abbildungsverzeichnis

- 1.1 Ort und Geschwindigkeit • 7
- 1.2 Vektoraddition • 8
- 1.3 Vektoraddition in Koordinaten • 8
- 1.4 Waagrechter Wurf • 10
- 1.5 schiefer Wurf • 10
- 1.6 Schrägaufzug • 13
- 1.7 Drehimpulskomponenten in der Ebene • 23
- 1.8 Die Kepler-Ellipse und der Flächensatz • 25
- 1.9 Gezeitenwirkung • 31
- 1.10 Bahnortbestimmung von Planeten • 32
  
- 2.1 Zusammensetzung von Kräften • 38
- 2.2 Gleichgewicht einer Leiter • 39
- 2.3 Zur Berechnung des Drehmoments • 40
- 2.4 Drehung um eine feste Achse • 42
- 2.5 Präzession eines Kreisels unter dem Einfluss der Schwerkraft • 45
- 2.6 zum Steinerschen Satz • 46
- 2.7 Zum Trägheitsmoment der Kugel • 47
- 2.8 Zum Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte • 48
- 2.9 Lage des Trägheitsellipsoids • 51
- 2.10 Kräftefreier Kreisel • 52



# 1. Mechanik des Massenpunkts

## 1.1. Kinematik

Die Kinematik befasst sich mit der Bewegung von Körpern ohne auf die sie verursachenden Kräfte einzugehen.

### 1.1.1. Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bewegungen eines Massenpunkts werden durch den Ortsvektor  $s$  des Massenpunkts beschrieben. Er ist eine Funktion der Zeit:  $s = s(t)$

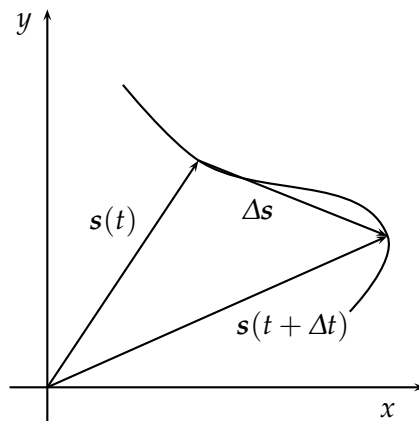


ABB. 1.1 Ort und Geschwindigkeit

#### Momentangeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.1)$$

#### Beschleunigung

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.2)$$

#### Gleichförmige Bewegung

$$v = \text{konstant} \quad \text{und} \quad s = v \cdot t \quad (1.3)$$

### Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$a = \text{konst}; \quad v = v_0 + a \cdot t; \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (1.4)$$

Bei geradlinigen Bewegungen kann man auch mit Skalaren rechnen, dann vereinbaren wir, dass eine Bewegung in Richtung der Koordinatenachse positiv und eine Bewegung in die Gegenrichtung negativ gezählt wird.

*Beispiel Bremsvorgang* Bremsvorgänge sind »ganz gewöhnliche« beschleunigte Bewegungen längs einer Geraden. Nur haben hier die Vektoren  $v$  und  $a$  verschiedene Vorzeichen. Es gelten also bei als gleichmäßig angenommener Verzögerung  $a$  die Gleichungen:

$$v = v_0 - at \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

#### 1.1.2. Zusammensetzung von Bewegungen

Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren addieren (überlagern) sich nach den Regeln der Vektoraddition. (»Kräfteparallelogramm«). Dies ist das sogenannte *Superpositionsprinzip*.

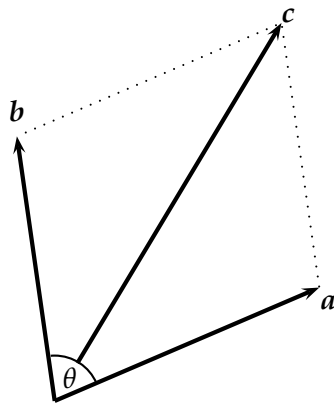


ABB. 1.2 Vektoraddition

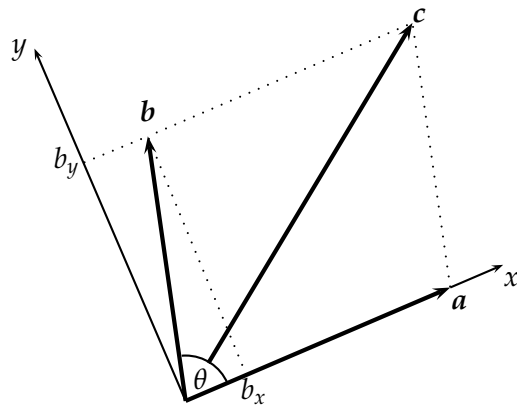


ABB. 1.3 Vektoraddition in Koordinaten

In der Abb. 1.2 wird die Addition von Vektoren mit dem »Kräfteparallelogramm« gezeigt. Zur Berechnung der Länge des resultierenden Vektors  $c = a + b$  und des Winkels zwischen  $a$  und  $c$  könnte man trigonometrische Verfahren verwenden, z. B. den Kosinussatz und den Sinussatz.

Für die praktische Rechnung ist es allerdings meist günstiger, ein passendes (rechtwinkliges) Koordinatensystem zu benutzen, so wie dies in der Abb. 1.3 gezeigt ist. Hier hat man die x-Achse willkürlich (aber geschickt!) in Richtung von  $a$  gelegt.  $\theta$  ist der Winkel den  $b$  mit der x-Achse (und damit mit  $a$ ) einschließt.

In diesem Koordinatensystem hat nun  $\mathbf{a}$  die Koordinaten  $a_x = a$  und  $a_y = 0$  und für  $\mathbf{b}$  gilt:

$$b_x = b \cos \theta \quad \text{und} \quad b_y = b \sin \theta$$

$a$  und  $b$  sind dabei die Beträge der Vektoren. Wesentlich bei der Berechnung ist, dass sich die Koordinaten der Vektoren addieren, dass also die Koordinaten von  $\mathbf{c}$  als

$$c_x = a_x + b_x \quad \text{und} \quad c_y = a_y + b_y$$

berechnet werden.

### 1.1.3. Wurfbewegungen

Würfe stellen einen Spezialfall des Superpositionsprinzips dar. Bei allen Würfen erfolgt die Beschleunigung allein durch die Schwerkraft. Die Anfangsgeschwindigkeit ist  $v_0$ . Man unterscheidet:

- *Senkrechter Wurf*: Die Bewegung erfolgt allein in Richtung der Schwerkraft also vertikal. Es gibt senkrechte Würfe nach oben und nach unten. Da hier nur eine Richtung vorkommt, gelten die Formeln (1.4) der gleichmäßig beschleunigten Bewegung in skalarer Form. Die Beschleunigung  $a$  ist dabei gleich der Fallbeschleunigung  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ . Beim Wurf nach oben haben  $v_0$  und  $a$  verschiedene Vorzeichen.
- *Waagrechter Wurf*: (vgl. Abb. 1.4) Die Anfangsgeschwindigkeit ist in horizontaler Richtung, also senkrecht zur Richtung der Schwerkraft. Dabei gelten die Formeln:

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad v_x = v_0 \quad v_y = g t \quad (1.5)$$

- *Schiefer Wurf*: (vgl. Abb. 1.5). Dies ist der allgemeine Fall. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  kann eine beliebige Richtung haben. Mit den Bezeichnungen von Abb. 1.5 gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha & y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_x &= v_0 \cos \alpha & v_y &= v_0 \sin \alpha - g t \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Wurfbahnen erhält man, indem man aus den Parameterdarstellungen (1.5) bzw. (1.6) die Zeit  $t$  eliminiert. Im Falle des schiefen Wurfs erhält man z. B.

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (1.7)$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

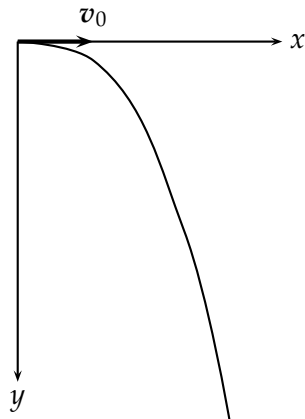


ABB. 1.4 Waagrechtter Wurf

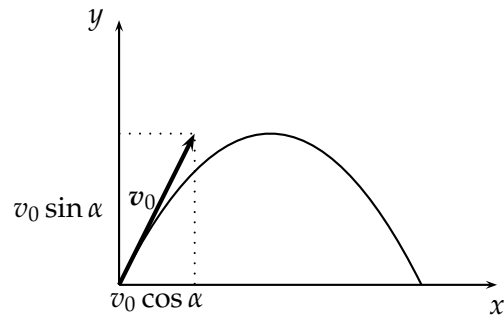


ABB. 1.5 schiefer Wurf

## 1.2. Dynamik

Die Dynamik untersucht die Bewegung der Körper unter dem Einfluss von Kräften. Als Grundlage dienen die Newtonschen Axiome:

1. **Trägheitsgesetz:** Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt.
2. **Newton'sches Grundgesetz:** Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional.

$$F = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (1.8)$$

Für konstante Massen ergibt sich demnach:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

3. **Wechselwirkungsgesetz:** Kräfte treten immer paarweise als Wechselwirkungskräfte auf, die an verschiedenen Körpern angreifen: sie sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.

### 1.2.1. spezielle Kräfte

1. *Gravitationskraft:*

Newton'sches Gravitationsgesetz:  $F = G \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (1.9)$

dabei ist:

$M$ : Masse des felderzeugenden Körpers

$m$ : Masse des Körpers, auf den das Gravitationsfeld von  $M$  wirkt

$G$ : Gravitationskonstante  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

Speziell: Masse und Radius der Erde:  $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R = 6370 \text{ km}$

Daraus ergibt sich für die Fallbeschleunigung  $g$  auf der Erdoberfläche und für die Gewichtskraft  $F_G$ :

$$g \approx 9.81 \text{ m/s}^2 \quad \text{und} \quad F_G = m \cdot g$$

## 2. Elastische Kraft:

Bei einem stabförmigen Körper verursacht eine Zug- oder Druckkraft eine Längenänderung  $\Delta\ell$ . Mit den folgenden Bezeichnungen

$\ell$ : Stablänge ohne Kraftwirkung

$\Delta\ell$ : Längenänderung durch die Kraftwirkung

$\varepsilon$ : Dehnung  $= \Delta\ell / \ell =$  relative Längenänderung

$A$ : Querschnittsfläche

$F$ : Kraft

$\sigma$ : Spannung  $= F / A$

$E$ : Elastizitätsmodul

gilt dann das HOOKEsche Gesetz

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.10)$$

Spannung und Dehnung sind zueinander proportional.

Aus (1.10) folgt auch  $F \sim \Delta\ell$ .

Bei Federn schreibt man das HOOKEsche-Gesetz in der Form

$$F = D \cdot s$$

Dabei bezeichnet man  $D$  als Richtgröße, Federstarre oder Federsteifigkeit.  $s$  ist die durch die Kraft  $F$  bewirkte Längenänderung.

## 3. Reibungskräfte

a) zwischen Festkörpern:

Hier wirken die Reibungskräfte immer parallel zur Berührungsfläche und sind der Bewegung entgegengerichtet. Es gilt die Näherungsformel:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (1.11)$$

mit den Bezeichnungen:

$F_R$ : Reibungskraft

$\mu$ : Reibungskoeffizient (hängt vom Material ab)

$F_N$ : Normalkraft, das ist die Kraft, mit der die reibenden Körper aneinander gedrückt werden.

## 1. Mechanik des Massenpunkts

- Haftreibung tritt auf, wenn der Körper auf seiner Unterlage ruht und in Bewegung gesetzt werden soll.
- Gleitreibung tritt dann auf, wenn sich die Körper gegeneinander bewegen. Es ist  $\mu_g < \mu_h$ .
- Rollreibung tritt auf, wenn der Körper auf seiner Unterlage rollt. Es ist  $\mu_r \ll \mu_g$

### b) in Gasen und Flüssigkeiten:

Wenn sich ein Körper mit nicht zu hoher Geschwindigkeit durch ein Gas oder eine Flüssigkeit bewegt (*laminare* Strömungsverhältnisse), erfährt er eine Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit  $v$  und der Viskosität  $\eta$  (=innere Reibung) der Flüssigkeit ist:

$$F_R = K \cdot \eta \cdot v$$

Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Form des Körpers ab.

Für eine Kugel vom Radius  $r$  gilt das STOKESSche Gesetz:

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (1.12)$$

Für höhere Geschwindigkeiten (also *turbulente* Strömungsverhältnisse) wird die Reibungskraft zu  $v^2$  proportional.

$$F_R = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (1.13)$$

Dabei bedeuten:

$c_w$ : Widerstandsbeiwert (abh. von der Form des Körpers)

$A$ : größter der Strömung entgegenstehender Körperquerschnitt

$\rho$ : Dichte des Gases bzw. der Flüssigkeit

### 4. Trägheitskräfte:

Trägheitskräfte treten in *beschleunigten* Bezugssystemen auf: Für einen außenstehenden Beobachter werden die Insassen einer Rakete, die bisher im freien Fall war, nun aber ihren Antrieb zündet, mit der Rakete beschleunigt. Auf die Insassen wirkt also die beschleunigende Kraft  $F = ma$ , die vom Raketenantrieb erzeugt wird.

Die Insassen empfinden diesen Vorgang so, als ob sie plötzlich wieder der Schwerkraft ausgesetzt wären. Körper, die vorher schwerelos in der Kabine herumschwebten, fallen nun wieder zu Boden. Sie erklären sich dies durch das Auftreten einer Kraft, eben der Trägheitskraft.

Prinzipiell lassen sich alle Aufgaben ohne die Einführung von Trägheitskräften bearbeiten, indem man ein *Inertialsystem* als Bezugssystem wählt, also ein System, in dem das Trägheitsgesetz gilt. Dennoch ist es manchmal der Anschauung zuträglich, ein beschleunigtes Bezugssystem zu wählen.

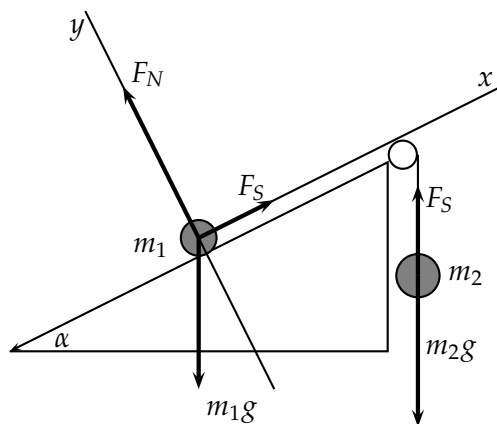


ABB. 1.6 Schrägaufzug

### 1.2.2. Beispiel: Bewegung auf der schiefen Ebene

In der Abb. 1.6 ist ein Schrägaufzug gezeichnet. Es soll die Beschleunigung mit der sich das System bewegt und die Kraft im Seil berechnet werden. Der Winkel der schiefen Ebene gegen die Horizontale sei  $\alpha$ .

Solche Aufgaben mit mehreren Körpern löst man immer auf analoge Weise: Man betrachtet für jeden der beteiligten Körper die angreifenden Kräfte in einem passend gewählten Koordinatensystem.

Die Masse  $m_2$  bewegt sich nur in vertikaler Richtung, deshalb sind hier keine zwei Achsen nötig. Wir wählen eine Achse, die nach unten zeigen möge.

Dann gilt für diesen Körper nach dem Newtonschen Grundgesetz »Summe der angreifenden Kräfte = Masse mal Beschleunigung«:

$$m_2g - F_S = m_2a \quad (*)$$

Für die Masse  $m_1$  wählt man die x-Achse parallel zur Ebene nach rechts oben. An  $m_1$  greifen die folgenden Kräfte an: 1. die Schwerkraft, 2. die Normalkraft, die die Unterlage auf  $m_1$  ausübt und 3. die Seilkraft, die nach schräg oben wirkt. Wir schreiben nun das Newtonsche Grundgesetz für jede Achsenrichtung an:

$$x: F_S - m_1g \sin \alpha = m_1a \quad y: F_N - m_1g \cos \alpha = 0$$

Man beachte, dass Unterlagen immer eine Normalkraft auf den Körper ausüben, und weiter, dass der Winkel zwischen  $m_1g$  und der negativen y-Achse wieder  $\alpha$  ist. Die Zerlegung der Kraftvektoren erfolgt wie in Abb. 1.3.

Nun hat man drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $a$ ,  $F_N$  und  $F_S$ , damit ist das Problem gelöst. Aus (\*) folgt z. B.  $F_S = m_2g - m_2a$ , dies in die Gleichung für die x-Richtung liefert  $m_2g - m_1g \sin \alpha = m_1a + m_2a$ , also

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_2 + m_1} g \Rightarrow$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

$$F_S = m_2 g - m_2 \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_2 + m_1} g = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 - \sin \alpha)$$

Ist  $m_2 < m_1 \sin \alpha$ , so wird  $a$  negativ, also  $m_2$  hochgezogen, eine Änderung des Ansatzes ist nicht nötig.

Man beachte auch, dass die Lösung lange nicht so einfach ist, wenn man die Achsen anders wählt, z.B. horizontal und vertikal. Dann müsste man mit den Unbekannten  $a_x, a_y, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Sx}$  und  $F_{Sy}$  arbeiten und weitere Beziehungen, wie  $a_x^2 + a_y^2 = a^2$  berücksichtigen.

### 1.3. Rotationsdynamik

Bei Rotationsbewegungen betrachtet man die Größen *Winkelgeschwindigkeit* und *Winkelbeschleunigung* (englisch: angular velocity bzw. angular acceleration). Eine Rotationsbewegung ist immer eine beschleunigte Bewegung, da sich der Geschwindigkeitsvektor in der Zeit ändert.

Die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  ist der Winkel (im Bogenmaß gemessen), der in der Zeiteinheit überstrichen wird, und die *Winkelbeschleunigung*  $\alpha$  ist die Änderung der Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit, also

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.14)$$

#### 1.3.1. Gleichförmige Kreisbewegung

Hier ist die Winkelgeschwindigkeit konstant, der Betrag des Geschwindigkeitsvektors bleibt konstant, er ändert nur seine Richtung. Es gelten die Beziehungen:

$$v = \omega \cdot r \quad \phi = \omega \cdot t \quad \alpha = 0 \quad (1.15)$$

Zwischen den Vektoren  $v$ ,  $\omega$  und  $r$  besteht der Zusammenhang:

$$v = \omega \times r \quad (1.16)$$

Dabei zeigt  $\omega$  in Richtung der Drehachse, und zwar gemäß der Rechte-Faust-Regel, d.h. in Richtung des Daumens, wenn die Finger der Kreisbewegung folgen.

#### 1.3.2. Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

Hier ist die Winkelbeschleunigung konstant, somit gilt in Analogie zur Bewegung auf einer Geraden:

$$\alpha = \text{konstant} \quad \omega = \alpha \cdot t \quad \phi = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (1.17)$$

## 1.3.3. Allgemeine Rotationsbewegung

Hier gilt:

$$\omega = \omega(t) \quad \alpha = \alpha(t) \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Die Änderung der Geschwindigkeit  $\Delta v$  kann man in zwei Komponenten zerlegen, eine in tangentialer Richtung  $\Delta v_t$  und eine in radialer Richtung  $\Delta v_r$ . Ihre Änderungen in der Zeiteinheit sind die Tangentialbeschleunigung  $a_t$  und die Radialbeschleunigung  $a_r$ .

Ändert sich nur die Richtung der Geschwindigkeit, so liegt eine gleichförmige Bewegung auf gekrümmter Bahn vor. In diesem Fall ist  $a_t = 0$  und  $\Delta v$  steht auf  $v$  immer senkrecht.

Ist  $|a_r|$  konstant so liegt eine Kreisbewegung vor.

## 1.3.4. Radialbeschleunigung bei gleichf. Kreisbewegung

Ein Massenpunkt läuft mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Dann ist der Ort  $r$  des Massenpunkts festgelegt durch die Koordinaten  $x = r \cdot \cos \omega t$  und  $y = r \cdot \sin \omega t$ . Wir berechnen Geschwindigkeit und Beschleunigung durch koordinatenweises Ableiten nach  $t$ :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Hieraus erkennt man, dass  $\mathbf{a}$  immer auf den Kreismittelpunkt gerichtet ist. Weiter folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{v}$$

Für den Betrag der Geschwindigkeit folgt erwartungsgemäß:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = r^2 \omega^2$$

Somit gelten bei der gleichförmigen Kreisbewegung die Beziehungen:

$$v = r\omega \quad a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (1.18)$$

Die Kraft, die die Radialbeschleunigung erzeugt, nennt man *Zentripetalkraft*, für sie gilt

$$F_{ZP} = m \cdot a_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \quad (1.19)$$

Dabei ist  $T = 2\pi/\omega$  die Umlaufzeit des Körpers auf seiner Kreisbahn.

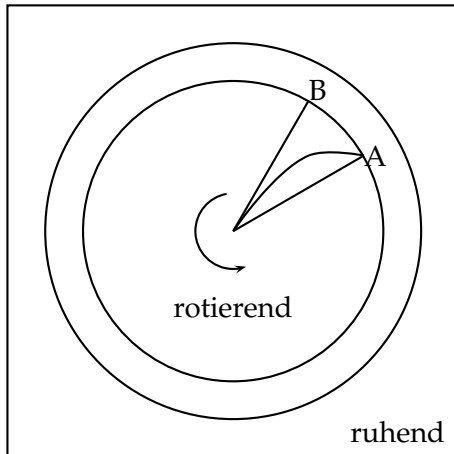
Die Zentripetalkraft muss durch äußere Kräfte aufgebracht werden z. B. durch die Gravitation bei der Bewegung von Planeten, Monden oder Satelliten oder durch Reibungskräfte auf einem Karussell.

### 1.3.5. Trägheitskräfte bei Rotationsbewegungen

In rotierenden (also beschleunigten) Bezugssystemen treten zwei Arten von Trägheitskräften auf, dies sind die *Zentrifugalkraft* und die *Corioliskraft*.

Ein mitkreisender Beobachter fühlt sich nach außen gezogen. Er spürt die Zentrifugalkraft  $F_{Zf}$ , deren Ursache seine Trägheit ist. Diese ist betragsmäßig gleich der Zentripetalkraft.

Vom Zentrum einer mit  $\omega$  rotierenden Scheibe schießt man eine Kugel radial mit der Geschwindigkeit  $v$  ab.



Im ruhenden System bewegt sich die Kugel auf einer Geraden zum Punkt B. Es ist  $r = vt$ . Für den bewegten Beobachter hat sich die Kugel nach A bewegt. Sie beschreibt also keine gerade Bahn. Dies schreibt er der Wirkung einer Kraft zu, die den Körper quer zur Bewegungsrichtung ablenkt. Es ist  $AB = \omega r t = \omega v t^2$ . Unter der Annahme einer konstanten Kraft ist die Auslenkung wie bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, also  $AB = \frac{1}{2} a t^2$ . Daraus folgt  $a = 2\omega v$ . Dies ist die Coriolisbeschleunigung.

Mittels komplexer Zahlen kann man alle diese Beziehungen recht einfach allgemein herleiten: Es sei  $z = x + iy$  der Ort im rotierenden Koordinatensystem und  $z' = x' + iy'$  der Ort im ruhenden System. Beide Koordinatensysteme haben ihren Ursprung in der Scheibenmitte, zur Zeit  $t = 0$  fallen die Achsen zusammen. Dann ist der Ort im ruhenden System zur Zeit  $t$ , in der sich die Scheibe um den Winkel  $\phi(t)$  weitergedreht hat gegeben durch:  $z' = e^{i\phi(t)} z$

Leitet man diese Beziehung zweimal nach der Zeit ab, so folgt mit Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{dt} &= e^{i\phi} \left( \frac{dz}{dt} + i \frac{d\phi}{dt} z \right) \\ \Rightarrow \frac{d^2 z'}{dt^2} &= e^{i\phi} \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + 2i \frac{d\phi}{dt} \frac{dz}{dt} - \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 z + i \frac{d^2 \phi}{dt^2} z \right) \end{aligned}$$

Schreiben wir wieder  $v$ ,  $a$ ,  $\omega$  und  $\alpha$ , dann gilt

$$a' = e^{i\phi} (a + 2i\omega v - \omega^2 z + i\alpha z) \Rightarrow a = a' e^{-i\phi} - 2i\omega v + \omega^2 z - i\alpha z$$

Die Kräfte im rotierenden System ergeben sich aus dem Newtonschen Grundgesetz:  $F = ma$ .  $a'$  ist die Beschleunigung relativ zum ruhenden System. Im rotierenden System ändert sie ihre Richtung aufgrund der Rotation, somit ist der

erste Term  $ma'e^{-i\phi}$  die im rotierenden System gemessene Kraft  $F$ . Man kann also schreiben:

$$ma = F - 2im\omega v + m\omega^2 z - im\alpha z$$

Der Summand  $-2im\omega v$  ist um den Winkel  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gegen  $v$  gedreht, dies ist die Coriolis-Kraft, die eine Ablenkung quer zur Bewegungsrichtung liefert; der Summand  $m\omega^2 z$  zeigt radial nach außen, dies ist die Zentrifugalkraft; schließlich zeigt  $-im\alpha z$  wieder senkrecht zur radialen Richtung, diese Kraft wird verursacht durch die Winkelbeschleunigung der Scheibe. Da hier nur rechte Winkel für die Richtungen auftreten, kann man diese Größen auch in vektorieller Form mit dem Vektorprodukt darstellen:

$$F_{Zf} = -m\omega \times (\omega \times r) \quad F_{Cor} = -2m\omega \times v \quad F_\alpha = -m\alpha \times r \quad (1.20)$$

Diese Beziehungen kann man auch direkt vektoriell bestimmen. Wir betrachten ein ruhendes Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $e_x, e_y, e_z$ . Daneben betrachten wir ein zweites, gegen dieses beschleunigtes System mit den Einheitsvektoren  $b_x, b_y, b_z$ . Der Vektor  $s(t)$  zeige vom Ursprung des  $e_k$ -Systems zum Ursprung des  $b_k$ -Systems. Ein beliebiger Raumpunkt habe im ruhenden System den Ortsvektor  $r$  mit den Koordinaten  $x_k$  und im beschleunigten System den Ortsvektor  $r'$  mit den Koordinaten  $\zeta_k$ . Dann gilt ersichtlich:

$$r = s + r'$$

Diese Gleichung leiten wir nun zweimal ab, um die Beschleunigungen zu bekommen. Dabei nehmen wir an, dass das beschleunigte System mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegen das ruhende System rotiere, dann gilt also  $\dot{b}_k = \omega \times b_k$ . Dann hat man:

$$\dot{r} = \dot{s} + \sum_{k=1}^3 \dot{\zeta}_k b_k + \sum_{k=1}^3 \zeta_k \dot{b}_k = \dot{s} + \sum_{k=1}^3 \dot{\zeta}_k b_k + \sum_{k=1}^3 \zeta_k (\omega \times b_k)$$

Und nochmal abgeleitet unter Beachtung von  $\dot{b}_k = \omega \times b_k$ :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{s} + \sum_{k=1}^3 \ddot{\zeta}_k b_k + 2 \sum_{k=1}^3 \dot{\zeta}_k (\omega \times b_k) + \sum_{k=1}^3 \zeta_k (\dot{\omega} \times b_k) + \sum_{k=1}^3 \zeta_k (\omega \times (\omega \times b_k)) \\ a &= \ddot{s} + a' + 2\omega \times v' + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r') \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung sind die gestrichelten Größen die Beschleunigung  $a' = \sum \ddot{\zeta}_k b_k$ , die Relativgeschwindigkeit  $v' = \sum \dot{\zeta}_k b_k$  und der Ortsvektor  $r' = \sum \zeta_k b_k$  bezogen auf das beschleunigte System. Die Auflösung nach  $a'$  ergibt dann nach Multiplikation mit  $m$  die Kräfte:

$$ma' = \underbrace{ma}_{\text{äußere Kraft}} - \underbrace{m\ddot{s}}_{\text{d'Alembert-Kraft}} - \underbrace{2m\omega \times v'}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\omega \times (\omega \times r')}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{m\dot{\omega} \times r'}_{\text{Winkelbeschl.}}$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Typische äußere Kräfte sind Gravitation, elektrische und magnetische Felder, usw. Die D'ALEMBERT-Kraft ist die durch die Translationsbeschleunigung hervorgerufene Trägheitskraft. Damit haben wir wieder die Formeln von Gl. (1.20).

### 1.4. Die Erhaltungssätze

In der Mechanik hat man drei Erhaltungsgrößen: die Energie, den Impuls und den Drehimpuls. Erhaltungsgrößen zeigen ein »mengenartiges« Verhalten, d. h. steigt irgendwo der Wert einer Erhaltungsgröße, so muss er an einer anderen Stelle um denselben Wert sinken.

Man sagt, die **Erhaltungsgrößen können weder erzeugt noch vernichtet werden**, ihre »Gesamtmenge« ist unverändert.

#### 1.4.1. Arbeit und Energie

Die Definition der Arbeit ist »Kraft mal Weg«, wobei nur die Kraftkomponente in Wegrichtung zur Arbeit beiträgt. Im Falle konstanter bzw. mit dem Ort veränderlicher Kraft erhält man so für die Arbeit  $W$  die Definitionsgleichungen:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_s \cdot s = F \cdot s \cdot \cos \sphericalangle(F, s) \quad \text{bzw.} \quad W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.21)$$

Zu jeder Art von Kraft gibt es eine Arbeitsform:

Kraft		Arbeitsform	
Gewichtskraft	$F = mg$	Hubarbeit	$W_H = mg \cdot \Delta h$
Federkraft	$F = Ds$	Spannarbeit	$W_S = \frac{1}{2}Ds^2$
Reibungskraft	$F = \mu F_N$	Reibungsarbeit	$W_R = F_R \cdot s$

Zur Herleitung der Gleichung für die Spannarbeit:

$$W_S = \int_0^s D \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2}Ds^2$$

##### 1.4.1.1. Kinetische Energie:

Schreibt man das Newtonsche Grundgesetz an und integriert beide Seiten über  $dx$ , dann ergibt sich:

$$W = \int_A^B F(x)dx = \int_A^B madx = \int_A^B m \frac{dv}{dt} dx = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

Die Größe

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1.22)$$

nennt man *kinetische Energie*, und es gilt somit:

$$\text{Änderung der Kinetischen Energie} = \text{Arbeit} \quad W = \Delta E_{\text{kin}} \quad (1.23)$$

Manchmal nennt man diese Größe auch Beschleunigungsarbeit, da es die Arbeit ist, die man braucht, um einen Körper auf die Geschwindigkeit  $v$  zu bringen. Trotzdem spielt die kinetische Energie eine andere Rolle, als etwa die Hubarbeit, denn ihrer Formel liegt *keine* Kraft zugrunde, sondern sie gibt nur an, wie groß die von einer Kraft aufzuwendende Arbeit sein muss, um die verlangte Geschwindigkeit zu erreichen. Das ist vergleichbar mit der Rolle der Zentripetalkraft, sie ist eigentlich auch keine Kraft; die Formel  $F_Z = m\omega^2 r$  gibt nur an, welche Kraft nötig ist, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten; woher dann diese reale Kraft tatsächlich kommt, ob von der Gravitation, einem Seil oder einem Magnetfeld ist dabei gleichgültig.

#### 1.4.1.2. Potentielle Energie

Betrachtet man die verschiedenen Kräfte, so stellt man fest, dass es zwei große Klassen gibt: Bei der einen ist die Arbeit unabhängig vom Weg, längs dem sie verrichtet wurde, sie hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Wegs ab. Dazu gehören die Schwerkraft mit der Hubarbeit, die Spannkraft mit der Spannarbeit. Die andere Klasse liefert vom Weg abhängige Kräfte, bekanntestes Beispiel ist die Reibungskraft mit der Reibungsarbeit, schiebt man eine Kiste gegen die Reibung von A nach B und wieder zurück, dann ist die gesamte Arbeit keineswegs Null, wie dies etwa beim Heben der Kiste auf die Höhe  $h$  und anschließendem Absenken auf den Boden der Fall ist.

Kräfte, deren Arbeit vom Weg unabhängig ist, nennt man *konservative* Kräfte. Ihnen kann man eine *potentielle Energie* zuordnen.

Eine potentielle Energie hängt nur vom Ort ab. Man wählt ein sogenanntes Nullniveau und bezeichnet die Arbeit, die *frei* wird, wenn man den Körper vom Ort  $P$  aufs Nullniveau bringt, als die potentielle Energie am Ort  $P$ .

Zur Hubarbeit gehört somit die *Lageenergie* (jede Höhe kann als Nullniveau verwendet werden), zur Spannarbeit die *Spannenergie* (die Auslenkung  $s = 0$  ist hier das Nullniveau). Es gibt aber *keine* Reibungsenergie.

Folgende Beziehung definiert die potentielle Energie:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W \quad \text{oder} \quad dE_{\text{pot}} = -F dx \Rightarrow E_{\text{pot}} = - \int_0^P F(x) dx \Rightarrow F(x) = - \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} \quad (1.24)$$

Man beachte die hier getroffene Vorzeichenregelung: Etwa bei der Hubarbeit sind  $F = -mg$  und  $x = h$  entgegengerichtet, da die Schwerkraft nach »unten« die

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Höhe aber nach »oben« zeigt. Somit ist  $W(h) = -mgh$  negativ. Größere Höhe soll aber größere Lageenergie bedeuten. Daher das Minuszeichen, nun ist nämlich wie gewünscht  $E_{\text{pot}} = +mgh \geq 0$

### 1.4.1.3. Energiesatz

In Gleichung (1.23) ist der Zusammenhang zwischen Arbeit und kinetischer Energie angegeben. Bei konservativen Kräften ist die Arbeit gerade die Änderung der potentiellen Energie. Aus  $\Delta E_{\text{kin}} = W$  folgt  $\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$  oder  $\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0$ .

Das bedeutet, dass die Summe der Änderungen von kinetischer und potentieller Energie immer Null ist, sofern nur konservative Kräfte wirken. In diesem Fall ist also die Summe von potentieller und kinetischer Energie konstant.

Treten auch nichtkonservative Kräfte wie Reibung auf, dann kann  $W$  nicht zur Gänze als  $\Delta E_{\text{pot}}$  geschrieben werden, sondern es bleibt ein Arbeitsanteil z. B.  $W_R$  übrig. In diesem Fall gilt:  $\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = W_R$ .

Der **Energiesatz besagt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann**, dass also die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems unverändert ist. Durch die Reibungsarbeit wird zwar *mechanische* Energie vernichtet, aber sie wirkt sich in einer Erhöhung der *inneren Energie* des Systems, also der Energie der ungeordneten Molekularbewegung aus. (Dies ist das Thema der Wärmelehre).

### 1.4.2. Leistung

Die Leistung  $P$  ist die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit, also

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{oder} \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = F \cdot v \quad (1.25)$$

Die ersten beiden Gleichungen geben die *mittlere Leistung* während der Zeit  $t$  bzw.  $\Delta t$  an, die beiden letzten die *Momentanleistung*. Die letzte Gleichung folgt aus  $dW = F ds$ , woraus die Beziehung nach Division mit  $dt$  wegen  $\frac{ds}{dt} = v$  folgt.

Hieraus folgt z. B., dass die Leistung beim Fahren im Luftwiderstand wegen  $F \sim v^2$  mit  $v^3$  wächst.

### 1.4.3. Impuls und Stöße

Der *Impuls* (englisch: *momentum*) einer Masse  $m$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist definiert als:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \quad (1.26)$$

Der Impuls ist ein Vektor, das macht ihn rechnerisch etwas komplizierter, einfacher ist dagegen, dass es keine verschiedenen Formen des Impulses gibt, der Impulserhaltungssatz gilt unverändert, ob Reibung oder nicht.

Nimmt der Impuls eines Körpers zu, so muss ein anderer Körper dieselbe Menge Impuls verlieren. Da der Impuls ein Vektor ist, gilt diese Aussage für jede Koordinatenrichtung.

#### 1.4.3.1. voll elastischer gerader Stoß

Die Bewegung erfolge auf einer Geraden. Vor dem Stoß haben die Massen  $m_1$  und  $m_2$  die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  und nach dem Stoß seien sie  $u_1$  und  $u_2$ . Ein Stoß heißt voll elastisch, wenn die kinetische Energie beim Stoß erhalten bleibt, wenn also keine Verformung oder Reibung auftritt. Diesen Idealfall beobachtet man bei makroskopischen Körpern höchstens in guter Annäherung, er tritt aber bei Stößen mikroskopischer Teilchen wie Protonen durchaus auf.

Die Summe der Impulse bzw. Energien ist

$$\text{vor dem Stoß: } p = m_1 v_1 + m_2 v_2 \text{ und } E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{nach dem Stoß: } p = m_1 u_1 + m_2 u_2 \text{ und } E = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Daraus ergeben sich die Endgeschwindigkeiten: (Die Herleitung steht in nahezu jedem Physikbuch)

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Etwas leichter zu merken ist die folgende Darstellung, bei der  $p$  den Gesamtimpuls von oben und  $M = m_1 + m_2$  die Gesamtmasse bezeichnet:

$$u_1 = \frac{2p}{M} - v_1 \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{2p}{M} - v_2 \quad (1.27)$$

#### 1.4.3.2. total unelastischer gerader Stoß

Beim total unelastischen Stoß bewegen sich die stoßenden Körper nach dem Stoß *gemeinsam* also mit der gleichen Geschwindigkeit  $u$  weiter. Dabei werden die Körper i.a. verformt, d. h. mechanische Energie geht verloren, sie wird zur Verformung der Körper benötigt.

Es gilt dann der Impulssatz:  $p = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u = Mu$

Daraus folgt:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{oder} \quad u = \frac{p}{M} \quad (1.28)$$

#### 1.4.3.3. Impulsänderung und Kraftstoß

Der Kraftstoß (englisch: Impulse, beachte die verschiedene Bedeutung in englisch und deutsch!) ist definiert als  $F\Delta t$ . Multipliziert man das Newtonsche Grundgesetz  $F = ma$  mit  $\Delta t$ , so folgt  $F\Delta t = ma\Delta t = m\Delta v$ . Somit ist

$$\text{Impulsänderung} = \text{Kraftstoß}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Diese Beziehung gilt auch für veränderliche Massen, etwa bei Raketen und ist somit eine Erweiterung der Formel  $F = ma$ . Newton hat sein Grundgesetz in dieser Form angegeben. Vergleiche (1.8).

Dieses Gesetz ist analog zum Energiesatz: So, wie die Energie eines abgeschlossenen Systems nur durch Austausch von Arbeit (oder Wärme) geändert werden kann, so kann der Impuls eines abgeschlossenen Systems nur durch einen Kraftstoß geändert werden.

### 1.4.3.4. Raketen

Eine im freien Raum befindliche Rakete stößt Verbrennungsgase mit der Geschwindigkeit  $c$  relativ zur Rakete (nach »hinten«) aus. Die in der Zeiteinheit ausgestoßene Gasmasse sei  $\mu$ . Die Masse der Rakete nimmt dadurch ab.

Man betrachtet die Impulse zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t + dt$ . Zur Zeit  $t$  ist die Masse  $m$  und die Rakete bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$ . Die Rakete hat also den Impuls  $mv$

Nach Ablauf der Zeit  $dt$  wurde die Gasmenge  $dm = -\mu dt < 0$  ausgestoßen mit der Geschwindigkeit  $v - c$  relativ zum »Boden«, wenn man der Flugrichtung der Rakete positives Vorzeichen gibt. Die Raketenmasse ist dann nur noch  $m + dm$ . ( $dm < 0$ !) Ihre Geschwindigkeit ist um  $dv$  gestiegen. Zur Zeit  $t + dt$  hat also die Rakete den Impuls  $(m + dm)(v + dv)$  und die ausgestoßene Gaswolke den Impuls  $-dm(v - c)$ . (Die Vorzeichen sind hier sehr sorgfältig zu beachten!)

Da der Gesamtimpuls zu beiden Zeitpunkten gleich sein muss, folgt:

$$\begin{aligned}mv &= (m + dm)(v + dv) - dm(v - c) \Rightarrow -cdm = mdv + dvdm \\ &\Rightarrow -cdm = mdv\end{aligned}$$

letzteres, weil  $dvdm$  als von zweiter Ordnung klein vernachlässigt werden kann. Nach Division mit  $dt$  und Beachtung von  $dm = -\mu dt$  folgt daraus sofort die *erste Raketengleichung*:

$$c\mu = m \cdot a$$

Man kann die letzte Gleichung von oben auch nach  $dv$  auflösen, dann bekommt man durch Integrieren:

$$dv = -c \frac{dm}{m} \Rightarrow v - v_0 = -c \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = c \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Dies ist die *zweite Raketengleichung*.

### 1.4.4. Drehimpuls

Der *Drehimpuls* (englisch: angular momentum) ist definiert als

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{oder} \quad \mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.29)$$

Der Drehimpuls  $L$  bezüglich eines Punktes  $O$  ist also ein Vektor, der senkrecht zu der von  $r$  und  $v$  aufgespannten Ebene steht. Bewegt sich  $m$  auf einer Kreisbahn mit Mittelpunkt  $O$ , so stehen  $r$  und  $v$  senkrecht aufeinander und  $L$  zeigt in Richtung der Drehachse. Dabei gilt

$$v = \omega r \quad \text{und} \quad L = mvr = mr^2\omega \quad \text{und} \quad L = mr^2\omega \quad (1.30)$$

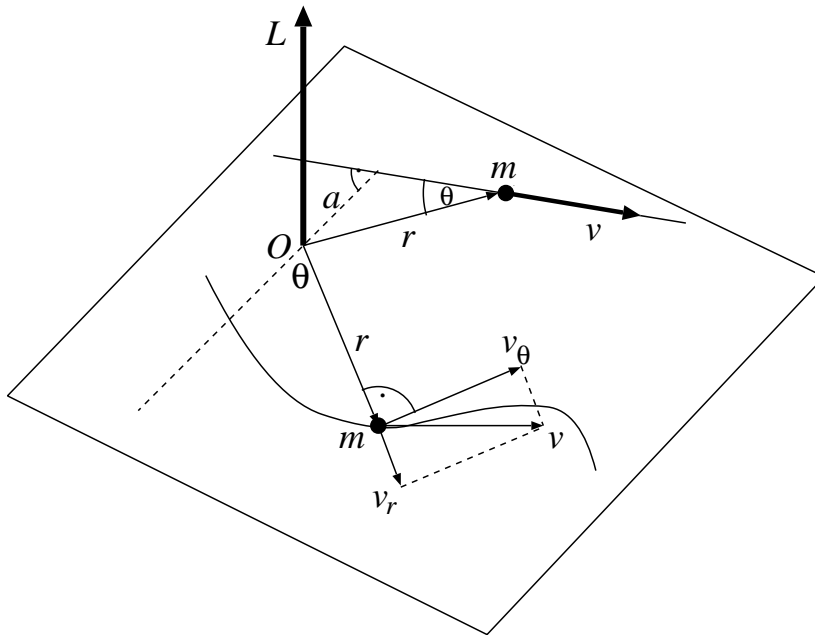


ABB. 1.7 Drehimpulskomponenten in der Ebene

Verläuft die Bewegung auf einer beliebigen Bahn in der Ebene, dann kann man  $v$  in eine radiale Komponente ( $v_r$ ) und eine dazu senkrechte, die *transversale* Komponente ( $v_\theta$ ) zerlegen. Nur die transversale Komponente liefert einen Beitrag zum Drehimpuls. Vergleiche Abb. 1.7. Es gilt dort:

$$L = mr \cdot v_\theta \quad \text{mit} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{folgt} \quad L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2 \omega(t)$$

#### 1.4.4.1. Drehimpulsänderung

Aus (1.29) und (1.8) folgt durch Ableiten:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} = r \times F = \tau \quad (1.31)$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Dabei bezeichnet

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

das *Drehmoment* (englisch: torque). Es wird in älteren Büchern auch mit  $M$  oder  $D$  bezeichnet. Siehe dazu auch Kapitel 2.

In der Praxis berechnet man Drehmomente und Drehimpulse gern mit Hilfe einer »Wirkungslinie«. Beim Drehmoment betrachtet man etwa die Gerade, die durch »Verlängerung« des Kraftpfeils entsteht und den Abstand  $a$  des Drehpunkts von dieser Wirkungslinie. Dann ist  $\tau = Fa$ . Analog ist die Wirkungslinie beim Drehimpuls die Verlängerung des Impulspfeils.

### 1.4.4.2. Drehimpulserhaltungssatz

Die Gleichung (1.31) zeigt, dass die Änderung des Drehimpulses von einem Drehmoment bewirkt wird. Greift kein Drehmoment an, so bleibt die Summe der Drehimpuls unverändert. Auch hier muss bei einer Erhöhung des Drehimpulses das Drehmoment irgendwo herkommen, also muss irgendwo anders Drehimpuls um denselben Wert vermindert werden.

## 1.5. Gravitation und Planetenbewegung

Zur Gravitationskraft vgl. Gleichung (1.9). Dieses Gesetz gilt zunächst nur für Punktmassen und wie man zeigen kann auch für kugelförmige Massen im Gebiet *außerhalb* der Kugeln.

### 1.5.1. Die Keplerschen Gesetze

Mit den drei Keplerschen Gesetzen lassen sich die Bewegungen der Himmelskörper (auch künstlicher Satelliten) vorausberechnen. Vergleiche die Abb. 1.8

1.Keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.

2.Keplersches Gesetz (Flächensatz): Der Fahrstrahl Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3.Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (1.32)$$

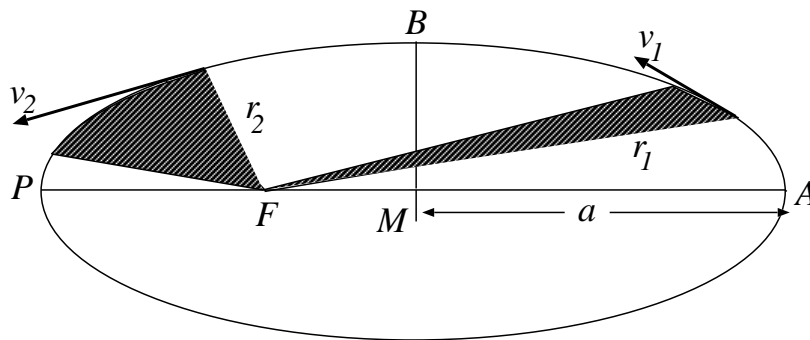


ABB. 1.8 Die Kepler-Ellipse und der Flächensatz

*Anmerkungen:* Wie die Rechnung zeigt, können sich Körper unter dem Einfluss der Gravitation eines Zentralkörpers nicht nur auf Ellipsen, sondern auf beliebigen Kegelschnitten (also auch Parabeln und Hyperbeln) bewegen. Die Gesetze gelten in derselben Weise auch z.B. für einen Planeten und seine Monde. Das zweite Keplersche Gesetz zeigt, dass auf einer Kreisbahn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Das dritte Keplersche Gesetz gilt in dieser Form nur dann exakt, wenn der Zentralkörper eine sehr viel größere Masse hat als die Planeten.

*Hinweise:* In der Abb. 1.8 werden die schraffierten Flächen jeweils in der gleichen Zeit durchlaufen. Die Strecke  $a$  ist die große Halbachse, im Punkt  $F$  steht der Zentralkörper. Die Punkte  $P$  und  $A$  heißen *Perizentrum* und *Apozentrum*. Bei der Sonne als Zentralkörper spricht man von *Perihel* und *Aphel* (lies: Ap-hel), bei der Erde von *Perigäum* und *Apogäum*, bei anderen Sternen von *Periastron* und *Apastron*.  $M$  ist der Mittelpunkt der Ellipse und die Strecke  $MB$  nennt man die *kleine Halbachse*.

Als *Exzentrizität* einer Ellipse bezeichnet man  $\varepsilon = \overline{MF}/a$ .

Betrachtet man sehr kleine Zeitabschnitte  $\Delta t$ , dann werden die Sektorflächen zu schmalen, dreieckigen Keilen und es folgt nach dem 2.Keplerschen Gesetz:

$$\frac{1}{2}r_1(v_1\Delta t) = \frac{1}{2}r_2(v_2\Delta t) \quad \Rightarrow \quad r_1v_1 = r_2v_2 \quad \text{falls } v_i \perp r_i \quad (1.33)$$

Die Gravitationskraft ist eine *Zentralkraft*, die Kraft wirkt immer längs der Verbindungslinie von Sonne und Planet. Damit ist nach Gleichung (1.31) das Drehmoment Null, also der Drehimpuls konstant. Genau das ist die Aussage des Flächensatzes. Diese Feststellung gilt für alle Zentralkräfte.

### 1.5.2. Energie im Gravitationsfeld

Die Gravitationskraft ist eine konservative Kraft, die von ihr verrichtete Arbeit ist vom Weg unabhängig. Dies kann man formal sehen, wenn man den Weg in Kom-

## 1. Mechanik des Massenpunkts

ponenten in radialer und transversaler Richtung zerlegt. Nur die radialen Anteile tragen etwas zur Arbeit bei. Somit existiert eine potentielle Energie des Gravitationsfelds, die allein vom Abstand von der felderzeugenden Masse abhängt. Beim Gravitationsfeld legt man das Nullniveau üblicherweise ins Unendliche, damit ergibt sich für die potentielle Energie eines Körpers der Masse  $m$  im Abstand  $r$  von der Masse  $M$  nach (1.24):

$$E_{\text{pot}} = -G \int_{\infty}^r -\frac{Mm}{x^2} dx = -G \frac{Mm}{r} = m \left( -\frac{GM}{r} \right) \quad (1.34)$$

Hier ist auch wieder die Richtung von  $r$  und  $F$  entgegengesetzt. Den Ausdruck

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \quad (1.35)$$

bezeichnet man als das *Gravitationspotential* der Felds der Masse  $M$ . Die potentielle Energie des Gravitationsfelds ist eine Lageenergie. Da sie im Unendlichen den Wert Null hat, muss sie bei Annäherung an die Zentralmasse abnehmen, dies tut sie, sie wird negativer. Bei dieser Wahl des Nullniveaus ist die Gravitationsenergie *immer* negativ.

Das Feld komplizierterer Massenverteilungen lässt sich als Summe der Felder von Punktmassen darstellen. Damit ergibt sich  $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$  bzw.  $\varphi(\mathbf{r})$  durch Summierung (Integration) der Beiträge der einzelnen Massenelemente.

*Kugeln als Feldquelle:* Eine kugelförmige Masse erzeugt in ihrem Äußeren dasselbe Feld wie eine punktförmige Masse gleicher Größe im Mittelpunkt der Kugel. (Eine Herleitung steht z. B. in Halliday/Resnick [3].) Andererseits ist das Gravitationsfeld im Innern einer Hohlkugel Null. Auf ein Teilchen im Innern einer Masse, etwa der Sonne, im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt wirkt also nur die Anziehungskraft der inneren Kugel mit Radius  $r$ . Die Kräfte der äußeren Schichten heben sich alle gegenseitig auf.

### 1.5.3. Bahngleichung im Gravitationsfeld

Mit Vektorrechnung kann man die Bahn eines Körpers der Masse  $m$  unter dem Einfluss der Zentralmasse  $M \gg m$  berechnen: Nach dem Newtonschen Grundgesetz schreibt man:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.36)$$

Multipliziert man diese Gleichung vektoriell mit  $\mathbf{r}$  von links, so folgt durch einmaliges Aufleiten:

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

denn es gilt nach der Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{o} + \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Dies ist das **zweite Keplersche Gesetz**, also der Drehimpulserhaltungssatz, denn  $L = m\mathbf{h}$  ist der Drehimpuls.

Multipliziert man die beiden Gleichungen vektoriell, dann ergibt sich:

$$\mathbf{h} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = -\frac{GM}{r^3} (\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}))$$

Verwendet hat man den *Entwicklungssatz für dreifache Vektorprodukte*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Mit der aus  $\mathbf{r}^2 = r^2$  folgenden Beziehung:

$$2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 2r \frac{dr}{dt} = \frac{dr^2}{dt} = \frac{dr^2}{dt} = 2r \frac{dr}{dt}$$

ergibt sich:

$$\mathbf{h} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} r - \mathbf{r} \frac{dr}{dt} \right) = -GM \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Durch Aufleiten folgt nun mit der Integrationskonstante  $-A\mathbf{e}$  (wo  $\mathbf{e}$  ein Einheitsvektor sei, also  $e^2 = 1$ ) und anschließendem skalaren Multiplizieren mit  $\mathbf{r}$  und Beachtung von  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  und  $(\mathbf{h} \times \mathbf{v})\mathbf{r} = \mathbf{h}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{h}^2$

$$\mathbf{h} \times \mathbf{v} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r} - A\mathbf{e}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{h} \times \mathbf{v})\mathbf{r} = -GMr - Ar \cos \phi \Rightarrow \frac{h^2}{GM} = r \left( 1 + \frac{A}{GM} \cos \phi \right)$$

Mit den Abkürzungen

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{A}{GM}$$

ergibt sich durch Auflösen die Bahngleichung in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} \tag{1.37}$$

Dies ist das **erste Keplersche Gesetz**. Die Bahn ist ein Kegelschnitt.

Für  $\phi = 0$  ist  $r$  minimal, das ist der Ort des Perizentrums. Für  $\phi = \pi$  hat man maximales  $r$ , das Apozentrum.

Im Perizentrum kann die Bahn durch den Krümmungskreis des Kegelschnitts angenähert werden. Der Krümmungskreis im Hauptscheitel eines Kegelschnitts hat immer den Radius  $p$ .

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Multipliziert man die Gleichung (1.36) mit  $\frac{dr}{dt}$  und integriert, dann bekommt man für die Gesamtenergie

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} + E \quad \text{oder} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (1.38)$$

Die Gesamtenergie  $E$  ist die Summe von kinetischer und potentieller Energie.

An der Stelle des Perihels ist die Entfernung vom Zentralkörper  $r_p = p/(1 + \varepsilon)$  und die Gravitation hält den Körper auf der Krümmungskreisbahn mit Radius  $p$ . Die Zentripetalkraft muss also gleich der Gravitation sein, also

$$\frac{mv^2}{p} = \frac{GMm}{r_p^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMmp}{r_p^2} = \frac{GMm}{r_p} + E \Rightarrow \varepsilon^2 - 1 = \frac{2pE}{GMm}$$

Damit haben wir den Zusammenhang der Bahngrößen  $p$  und  $\varepsilon$  mit den physikalischen Größen  $M$ ,  $h = L/m$ , und  $E$  hergestellt.

Da  $\varepsilon \geq 0$  sein muss und die Bahnform bestimmt, folgt, dass diese von der Gesamtenergie bestimmt ist, denn es gilt:

$$\begin{aligned} E > 0 \quad \varepsilon > 1 & \text{ Hyperbelbahn} \\ E = 0 \quad \varepsilon = 1 & \text{ Parabelbahn} \\ E < 0 \quad \varepsilon < 1 & \text{ Ellipsenbahn} \end{aligned}$$

Es bleibt noch das dritte Keplersche Gesetz zu zeigen: Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz gilt für die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi = \frac{h}{2} dt$$

Berechnet man die Zeit für einen vollen Umlauf auf der Ellipse, dann folgt unter Verwendung der Formel für die Fläche einer Ellipse  $A = \pi ab$ :

$$T = \int dt = \frac{2}{h} \int dA = \frac{2}{h} A = \frac{2}{h} \pi ab$$

Nun gilt für die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$ :

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} \right) = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow b^2 = ap$$

Somit folgt

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} a^2 b^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} a^2 ap = \frac{4\pi^2}{h^2} a^3 p$$

Ersetzt man noch  $p = h^2/GM$ , so bleibt schließlich

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (1.39)$$

Dies ist das **dritte Keplersche Gesetz**.

## 1.5.3.1. Bewegung um gemeinsamen Schwerpunkt

Ist  $m$  nicht vernachlässigbar klein gegen  $M$ , dann bewegen sich beide Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, in dem die Masse  $M + m$  vereinigt gedacht werden kann. Das soll nun näher betrachtet werden.

Sei  $S$  der gemeinsame Schwerpunkt des Systems,  $\mathbf{r}$  der Vektor von  $M$  nach  $m$  und  $\mathbf{s}$  der Vektor von  $M$  nach  $S$ , dann gelten für die Bewegung von  $M$  und  $m$  nach dem Newtonschen Grundgesetz bezüglich des Punktes  $S$  die Gleichungen:

$$-M \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \frac{GMm\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad m \frac{d^2(\mathbf{r} - \mathbf{s})}{dt^2} = m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} \right) = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3}$$

Ersetzt man mittels der ersten der beiden Gleichungen in der zweiten  $\mathbf{s}$ , dann folgt:

$$m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{Gm\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3} (M + m) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(M + m)\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.40)$$

diese Gleichung hat dieselbe Gestalt wie (1.36) nur tritt statt  $M$  hier  $M + m$  auf. Die ganze obige Herleitung bleibt daher bis auf diese Änderung unverändert.

Wenn wir noch die Energien betrachten, dann ist die kin. Energie im System des Schwerpunktes, wenn  $v_{1,2}$  die Geschwindigkeiten von  $M$  und  $m$  sind:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

Weil aber für die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  der Massen  $M$  und  $m$  vom Schwerpunkt gelten muss

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{M} \quad \text{und} \quad r_1 + r_2 = r$$

folgt

$$r_1 = \frac{mr}{M + m} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{Mr}{M + m}$$

und für die Geschwindigkeit  $v$  der Masse  $m$  im System, in welchem  $M$  ruht:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{v} = \frac{r_2}{r}$$

Damit ist die kinetische Energie, wenn man die  $v_i$  und  $r_i$  mit obigen Gleichungen ersetzt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{Mv^2 r_1^2}{2r^2} + \frac{mv^2 r_2^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} v^2 \equiv \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (1.41)$$

wo  $\mu$  hier die *reduzierte Masse* bezeichnet. Damit gilt nun auch  $(M + m)\mu = Mm$ , womit sich potentielle Energie ergibt:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{G(M + m)\mu}{r} \quad (1.42)$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Der Gesamtdrehimpuls  $L$  der Massen ist im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} L &= Mr_1 \times v_1 + mr_2 \times v_2 \\ &= M \cdot \frac{m}{M+m} \mathbf{r} \times \frac{m}{M+m} \mathbf{v} + m \cdot \frac{M}{M+m} \mathbf{r} \times \frac{M}{M+m} \mathbf{v} \\ &= \mu \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

Damit sind nun die folgenden beide Probleme gleichwertig:

- Die Massen  $M$  und  $m$  umlaufen ihren gemeinsamen Schwerpunkt (Schwerpunktsystem)
- Ein Körper mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$  umläuft einen ruhenden Körper der Masse  $M_{\text{tot}} = M + m$  (Ruhsystem von  $M$ )

Wir haben bisher alle Formeln für den Fall  $m \ll M$ , also für eine ruhende Zentralmasse  $M$  hergeleitet und machen das auch weiterhin so. Die Übertragung auf den Fall nicht vernachlässigbar kleiner Masse  $m$  ist nun ganz leicht: Man ersetze in allen Formeln  $M$  durch die Gesamtmasse  $M + m$  und  $m$  durch die reduzierte Masse  $\mu$ . In den meisten Gleichungen taucht allerdings  $m$  gar nicht auf, was die Sache noch einfacher macht.

### 1.5.3.2. Bahngeschwindigkeit

Die große Halbachse einer Ellipsenbahn ist das Mittel des Perihelabstands und des Aphelabstands also  $a = (r_p + r_a)/2 = p/(1 - \varepsilon^2)$  und somit  $r_p = a(1 - \varepsilon)$ . Betrachtet man die Gleichung (1.38) der Gesamtenergie, so kann man den Wert von  $E$  durch Einsetzen der Werte für das Perihel bestimmen:

$$E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2} \frac{GMmp}{r_p^2} - \frac{GMm}{r_p}$$

Ersetzt man hierin  $r_p = p/(1 + \varepsilon)$  dann bekommt man

$$\frac{GMm}{2p} ((1 + \varepsilon)^2 - 2(1 + \varepsilon)) = \frac{GMm(-1 + \varepsilon^2)}{2p} = -\frac{GMm}{2a}$$

Da der Energiesatz gilt, folgt:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow \boxed{v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (1.43)$$

Die letzte Gleichung heißt *Vis-Viva-Integral* und erlaubt eine einfache Bestimmung der Geschwindigkeit des Planeten in Abhängigkeit von ihrem Abstand von der Sonne bei einer *Ellipsenbahn*.

Bei einer *Parabelbahn* setze man  $a = \infty$  und bei einer *Hyperbelbahn* ersetze man  $a$  durch  $-a$ . Bei einer *Kreisbahn* ist immer  $r = a$  und die Formel reduziert sich auf die Gleichheit von Zentripetalkraft und Gravitation.

## 1.5.4. Gezeitenkräfte

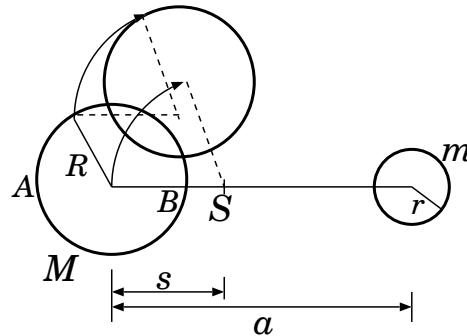


ABB. 1.9 Gezeitenwirkung

Wir betrachten zwei Massen  $M$  und  $m$  mit den Radien  $R$  und  $r$ , die den Abstand  $a$  voneinander haben und sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Vgl. Abb. 1.9. Dabei sollen die beiden Körper nicht rotieren (wenn sie es doch tun, so ist das für die Gezeitenwirkung zunächst unerheblich), sie bewegen sich also um den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  so wie ein Blatt Papier, das man auf dem Tisch im Kreis herumführt, ohne es in sich zu drehen, also dass z.B. eine Seite des Blatts immer parallel zur Zimmerwand bleibt. Dann erkennt man, dass alle Punkte des Körpers  $M$  eine Kreisbewegung mit *gleichem* Radius ausführen, nämlich dem Radius  $s$  in Abb. 1.9.

Nur die Mittelpunkte der Kreisbewegungen sind verschieden. Wir untersuchen die Gezeitenwirkung, die  $m$  auf  $M$  ausübt. Die Zentripetalkraft, um  $M$  auf der Kreisbahn zu halten, muss von der Gravitation aufgebracht werden, deshalb gilt für Kraft und Beschleunigung des Mittelpunkts von  $M$ :

$$M\omega^2 s = \frac{GMm}{a^2} \Rightarrow \omega^2 s = \frac{Gm}{a^2}$$

Für die Punkte  $A$  und  $B$  gilt analog für die Beschleunigung

$$\frac{Gm}{(a+R)^2} \quad \text{und} \quad \frac{Gm}{(a-R)^2}$$

Man sieht, dass in  $A$  die Anziehungskraft geringer als die benötigte Zentripetalkraft ist, dass also die Beschleunigung in  $A$  eine Restkomponente nach links besitzt.

Analog ist in  $B$  die Anziehungskraft größer als die benötigte Zentripetalkraft, es verbleibt also eine Komponente nach rechts. Die Differenz zwischen den Kräften in  $A$  bzw.  $B$  und  $M$  versucht die Masse in »die Länge« zu ziehen, diese Gezeitenbeschleunigung hat die Größe:

$$\frac{Gm}{a^2} - \frac{Gm}{(a+R)^2} = \frac{Gm}{a^2(a+R)^2} R(2a+R) \approx \frac{2GmR}{a^3}$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

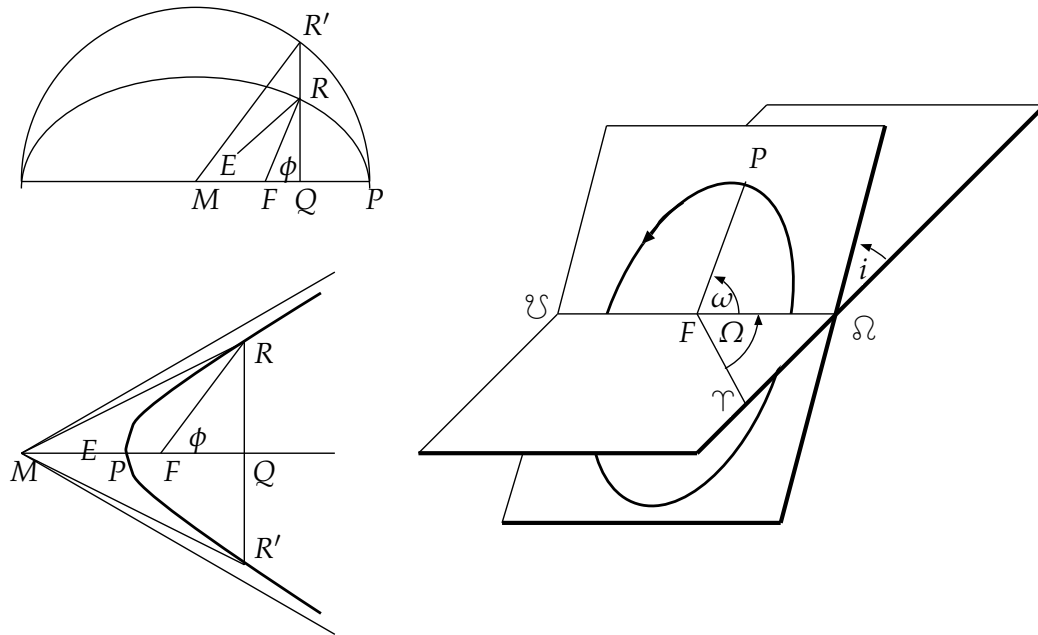


ABB. 1.10 Zur Bahnbestimmung.  $F$  ist der Ort der Sonne,  $M$  der Mittelpunkt der Ellipse bzw. Hyperbel und  $P$  das Perihel.  $R$  ist der momentane Ort des Planeten. Im rechten Bild sind die Ekliptik und die Bahnebene des Planeten gezeichnet und die Winkel, welche die Lage der Bahnebene bestimmen. Das Bild links unten zeigt die Situation bei Hyperbelbahnen.

Die letzte Näherung gilt, wenn man  $R \ll a$  voraussetzt. So entstehen die beiden Flutberge auf der Erde. Da sie rotiert, dreht sie sich unter den Flutbergen weg, so dass sie von der Erde aus gesehen synchron mit dem Mond die Erde umlaufen.

### 1.5.5. Bahnortbestimmung

Im rechten Bild sind die Kenngrößen für die Bestimmung der Bahn eingezeichnet. Dabei ist  $\Upsilon$  der Frühlingspunkt, von der aus in der Astronomie die Längengrade gezählt werden.  $\Omega$  ist der aufsteigende und  $\Psi$  der absteigende Knoten,  $\Omega$  die Länge des aufsteigenden Knoten, gemessen in der Ekliptikebene und schließlich  $\omega$  die Länge des Perihels, gemessen in der Bahnebene. Zum Schluss benötigt man noch die Inklination  $i$ , das ist die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik.

Insgesamt braucht man zur vollständigen Bestimmung des Planetenorts 6 Zahlenangaben: drei für die Lage der Bahnellipse  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ; zwei für die Form der Ellipse, z. B.  $a$  und  $\varepsilon$  und eine für die zeitliche Lage, etwa die Zeit des Periheldurchgangs  $T_p$ . Bei einer Parabelbahn ist ja  $a = \infty$ , deshalb braucht man bei ihr nur fünf Bahnelemente.

Oft findet man bei der Angabe der Bahndaten statt  $\omega$  die Größe  $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ . Das ist eine merkwürdige Winkelangabe, da  $\tilde{\omega}$  Summe zweier nicht in einer Ebene liegenden Winkel ist.

Um nun den Bahnort zu einer bestimmten Zeit  $t$  nach dem Periheldurchgang zu bestimmen, wird der Flächensatz in der Form (vgl. nach Gleichung (1.36) und vor Gleichung (1.37))  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}$  benützt.  $h$  ist hier die von  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  aufgespannte Parallelogramm-Fläche, diese ist in Polarkoordinaten gleich  $r^2 d\phi$ , da man  $r$  als Grundseite und  $r d\phi$  als Höhe verwenden kann. Damit ist  $\frac{1}{2} h dt$  die vom Fahrstrahl im Zeitintervall  $dt$  überstrichene Fläche. Weiter ergab sich oben, dass  $h^2 = GMp$  ist. Diese Eigenschaften werden wir im folgenden benützen.

### 1.5.5.1. Bahnort bei Ellipsen

Im linken Bild der Abb.1.10 ist eine Bahnellipse gezeichnet und der Kreis, aus dem diese durch Stauchung in der  $y$ -Richtung entstanden ist. Es soll der Ort des Planeten zu einer bestimmten Zeit  $t$  nach dem Periheldurchgang bestimmt werden. Dazu muss man den Winkel  $\phi$  kennen, der in der Astronomie *wahre Anomalie* genannt wird. Anstatt diesen direkt berechnen zu wollen, benützt man den Hilfswinkel  $E$ , der *exzentrische Anomalie* genannt wird. (Er ist der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Zentrum nicht die Sonne, der also »exzentrisch« ist.)

Nach dem Flächensatz überstreicht ja der Fahrstrahl Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Deshalb berechnen wir mal die Fläche des Ellipsensegments  $FPR$ . Zunächst ist die Fläche des Kreissegmentes  $MPR'$ , wenn man im Bogenmaß rechnet:  $\frac{1}{2} a^2 \cdot E$ . Wir stauchen es auf das Ellipsensegment  $MPR$ , das gibt  $\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot E$ . Davon muss man nun noch das Dreieck  $MFR$  abziehen, um das gewünschte zu bekommen. Damit ist nun

$$FPR = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot E - \frac{1}{2} \overline{MFR} \sin \phi = \frac{1}{2} abE - \frac{1}{2} \varepsilon ab \sin E \quad (1.44)$$

wobei  $r$  natürlich die Strecke  $FR$  ist. Andererseits ist auch  $MF = a\varepsilon$ . Ist nun  $T$  die Umlaufzeit des Planeten und  $t$  die Zeit seit dem Periheldurchgang, dann muss diese Fläche gerade  $\pi abt/T$  sein. Daraus folgt die *Keplersche Gleichung*:

$$E - \varepsilon \sin E = \frac{2\pi}{T} \cdot t \equiv \mathcal{M} \quad (1.45)$$

Man nennt  $\mathcal{M}$  die *mittlere Anomalie*, das ist der Winkel, den der Planet überstreichen würde, wenn er auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit die Sonne umliefe. Die Keplersche Gleichung kann nicht geschlossen, sondern muss näherungsweise gelöst werden. Bei kleinen  $\varepsilon$ , wie sie bei den Planeten vorliegen, kann das einfache Iterationsverfahren des Typs  $x = g(x)$  verwendet werden, das bekanntlich konvergiert, falls in der Nähe der Lösung  $|g'(x)| < 1$  ist. In diesem Falle ist  $g(E) = \varepsilon \sin E - \mathcal{M}$ , also  $|g'(E)| = |\varepsilon \cos E| \leq \varepsilon < 1$ .

Die mittlere Anomalie  $\mathcal{M}$  kann über die Konstante  $h$  ausgedrückt werden, Es muss ja in Gl.(1.44)  $FPR = \frac{1}{2} ht$  gelten, damit ist wegen  $b^2 = ap$

$$\frac{1}{2} abE - \frac{1}{2} \varepsilon ab \sin E = \frac{1}{2} ht = \frac{\sqrt{GMp}}{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} = \frac{t\sqrt{GMp}}{ab} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot t$$

## 1. Mechanik des Massenpunkts

Aus Abb.1.10 entnimmt man noch eine Beziehung: Es ist

$$a \cos E = a\varepsilon + r \cos \phi \quad (1.46)$$

Ersetzt man hier  $r$  mittels der Bahngleichung (1.37), dann bekommt man wegen  $p = a(1 - \varepsilon^2)$ :

$$a \cos E = \varepsilon a + \frac{p \cos \phi}{1 + \varepsilon \cos \phi} \Rightarrow \cos E = \frac{\varepsilon + \cos \phi}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

Damit kann man nun einen Zusammenhang zwischen  $E$  und  $\phi$  herleiten. Bekanntlich ist ja

$$\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}}$$

was man – so man es nicht in der Formelsammlung findet – über die Gleichheit  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  herleiten kann. Nun ist aber

$$1 - \cos E = \frac{(1 - \varepsilon)(1 - \cos \phi)}{1 + \varepsilon \cos \phi} \quad \text{und} \quad 1 + \cos E = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \cos \phi)}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

Damit erhält man:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{E}{2} \quad (1.47)$$

Aus der Bahngleichung  $r(1 + \varepsilon \cos \phi) = p = a(1 - \varepsilon^2)$  und aus Gleichung (1.46) folgt

$$r\varepsilon \cos \phi = a - a\varepsilon^2 - r \quad \text{und} \quad r\varepsilon \cos \phi = a\varepsilon \cos E - a\varepsilon^2$$

und daraus sofort:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E) \quad (1.48)$$

Um also den Ort des Planeten zu einem gegebenen Zeitpunkt berechnen zu können, muss man die Lage der Bahn (s. o.) kennen, dann die Umlaufzeit und den Zeitpunkt des Periheldurchgangs. Dann bestimmt man mit der Keplerschen Gleichung die exzentrische Anomalie  $E$  und den Sonnenabstand  $r$ . Damit ist die Lage in ekliptikalen heliozentrischen Koordinaten bestimmt.

### 1.5.5.2. Bahnort bei Parabeln

Für die Parabel integrieren wir den Flächensatz direkt.

$$h = r^2 \dot{\phi} \Rightarrow ht = \int_0^{\phi} \frac{p^2 d\phi}{(1 + \cos \phi)^2}$$

In der zweiten Gleichung wurde für  $r$  die Bahngleichung mit  $\varepsilon = 1$  (Parabel) eingesetzt.

Um das Integral zu berechnen kann man die Standardsubstitution für gebrochen rationale Funktionen von trigonometrischen Funktionen machen, also setzt man

$$u = \tan \frac{\phi}{2} \Rightarrow u^2 = \tan^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi} \Rightarrow \cos \phi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Weiter ist

$$du = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}) d\phi = \frac{1}{2} (1 + u^2) d\phi$$

Damit wird der Integrand:

$$1 + \cos \phi = 1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{2}{1 + u^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{(1 + \cos \phi)^2} = \frac{1}{2} (1 + u^2) du$$

Damit hat man nun

$$ht = p^2 \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + \cos \phi)^2} = \frac{1}{2} p^2 \int_{\phi=0}^\phi (1 + u^2) du = \frac{1}{2} p^2 \left( \tan \frac{\phi}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\phi}{2} \right)$$

Mit  $h^2 = GMp$  bekommt man schließlich mit dem Perihelabstand  $r_p = \frac{1}{2}p$ :

$$\tan \frac{\phi}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\phi}{2} = 2 \sqrt{\frac{GM}{p^3}} \cdot t = \sqrt{\frac{GM}{2r_p^3}} \cdot t \equiv \mathcal{M} \quad (1.49)$$

Diese Gleichung heißt *Barkersche Gleichung*. Es liegt eine Gleichung dritten Grades in  $\tan(\phi/2)$  vor, die eine reelle Lösung hat, die auf eine der folgenden Arten angegeben werden kann (wo  $A = \frac{3}{2}\mathcal{M}$  gesetzt wurde):

$$\begin{aligned} \tan \frac{\phi}{2} &= \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + 1} + A} - \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + 1} - A} \\ &= \frac{2}{\tan \left( 2 \arctan \sqrt[3]{\tan \left( \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{A} \right)} \right)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Die Gleichung gilt für positive  $\mathcal{M}$ , für negative, also Zeiten vor dem Periheldurchgang, rechnet man mit dem Betrag und nimmt dann für  $\phi$  das negative Vorzeichen. Für den Abstand von der Sonne bekommt man nun:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \phi} = \frac{1}{2} p \left( 1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right) = r_p \left( 1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right) \quad (1.51)$$

Die üblicherweise angegebene Bahngröße bei Parabeln ist nicht  $p$ , sondern der Perihelabstand  $r_p = \frac{1}{2}p$ .

## 1. Mechanik des Massenpunkts

### 1.5.5.3. Bahnort bei Hyperbeln

Bei Hyperbeln (vgl. Abb.1.10 links unten) gelten ja für die kartesischen Koordinaten eines Punktes  $x = a \cosh E$  und  $y = b \sinh E$ . Damit bekommt man die Gleichungen:

$$r \cos \phi = a \cosh E - a\varepsilon \quad \text{und} \quad r \sin \phi = b \sinh E$$

Mit den Bezeichnungen von Abb.1.10 gilt damit bei Standardhyperbeln  $x^2 - y^2 = 1$ , so dass  $\frac{1}{2}E$  gerade die Fläche des Stücks  $MPR$  ist ; eine Hyperbel mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  entsteht daraus durch Streckung mit  $a$  in  $x$ -Richtung und mit  $b$  in  $y$ -Richtung, so dass diese Fläche dann zu  $\frac{1}{2}abE$  wird. Damit gilt für die von uns gesuchte Fläche des Stücks  $PFR$  hier:

$$PFR = MQR - FQR - MPR = \frac{1}{2}ab \cosh E \sinh E - \frac{1}{2}(a \cosh E - a\varepsilon)b \sinh E - \frac{1}{2}abE$$

Somit ist

$$PFR = \frac{1}{2}ab(\varepsilon \sinh E - E) = \frac{1}{2}ht = \frac{1}{2}\sqrt{GMp} \cdot t$$

Wegen  $b^2 = ap$  folgt wieder das Analogon zur Keplergleichung:

$$\varepsilon \sinh E - E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot t \equiv \mathcal{M} \quad (1.52)$$

Analog zur Ellipse haben wir wieder die Beziehungen (in der Skizze ist der Scheitel links, also als Bahngleichung  $r(1 - \varepsilon \cos \phi) = p$  zu verwenden, auch ist bei Hyperbeln  $p = (\varepsilon^2 - 1)a$  :

$$a \cosh E = a\varepsilon + r \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \cosh E = \varepsilon + \frac{(\varepsilon^2 - 1) \cos \phi}{1 - \varepsilon \cos \phi} = \frac{\varepsilon - \cos \phi}{1 - \varepsilon \cos \phi} \quad (1.53)$$

Weiter gilt für Hyperbelfunktionen:

$$\tanh^2 \frac{E}{2} = \frac{\cosh E - 1}{\cosh E + 1} = \frac{(\varepsilon - 1)(1 + \cos \phi)}{(\varepsilon + 1)(1 - \cos \phi)}$$

denn es ist:

$$\cosh E - 1 = \frac{(\varepsilon - 1)(1 + \cos \phi)}{1 - \varepsilon \cos \phi} \quad \text{und} \quad \cosh E + 1 = \frac{(\varepsilon + 1)(1 - \cos \phi)}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

Damit bekommt man fast dieselbe Gleichung wie bei Ellipsen:

$$\cot \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \tanh \frac{E}{2} \quad (1.54)$$

Das passt, denn mit wachsendem  $E$  nimmt  $\phi$  ab. Schließlich kann man auch noch das Analogon zu Gleichung (1.48) herleiten. Die Bahngleichung lautet ja nun

$r(1 - \varepsilon \cos \phi) = a(\varepsilon^2 - 1)$  und aus Gleichung (1.53) folgt  $a\varepsilon \cosh E = a\varepsilon^2 + r\varepsilon \cos \phi$ .  
Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann folgt

$$r = a(\varepsilon \cosh E - 1) \tag{1.55}$$

Das war wieder einmal ein schönes Beispiel für die große Analogie, die zwischen Hyperbeln und Ellipsen herrscht, meistens muss man nur ein paar Vorzeichen ändern.

## 2. Der starre Körper

Ein starrer Körper ist ein (idealisiertes) Gebilde, dessen Ausdehnung und Gestalt durch angreifende Kräfte nicht verändert werden kann. Insbesondere Rotationen eines starren Körpers sind Gegenstand der Untersuchung. Vergleiche deshalb die bei der Rotationsbewegung in Abschnitt 1.3 eingeführten Größen Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls und Drehmoment.

### 2.1. Statik

Die Statik beschäftigt sich mit den starren Körper im Zustand der Ruhe und sucht die Bedingungen, unter denen die angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind.

#### 2.1.1. Kräfte

Kräfte sind besondere Vektoren, sie haben nicht nur Betrag und Richtung, sondern auch einen Angriffspunkt, d. h. sie können nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

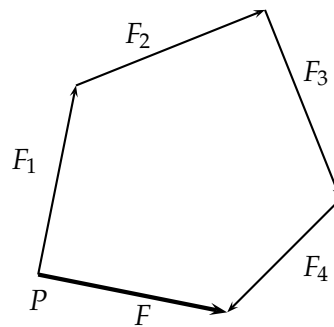


ABB. 2.1 Zusammensetzung von Kräften

In Abb. 2.1 ist die Zusammensetzung der Kräfte  $F_1, \dots, F_4$  zur resultierenden Kraft  $F$  mit dem Kräftepolygon gezeigt. Alle Kräfte greifen an der Stelle  $P$  an, werden aber (nur zur Konstruktion) aneinandergehängt.

Zur rechnerischen Behandlung ist es wieder besser ein geeignetes Koordinatensystem einzuführen, dann gilt in jeder Koordinatenrichtung für die resultierende Kraft  $F$ :

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x} \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{i,y} \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{i,z}$$

### 2.1.2. Drehmoment

Die Definition des Drehmoments ist Kraft mal Kraftarm, wobei man unter Kraftarm den Abstand der Drehachse von der Wirkungslinie der Kraft versteht.

In Gleichungsform lautet die Definition:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = F \cdot r \cdot \sin \alpha \quad (2.1)$$

Das Drehmoment ist ein Vektor, seine Richtung erhält man aus der »Rechte-Faust-Regel« es zeigt in Richtung des Daumens, wenn die Finger der Drehbewegung folgen.

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die sowohl die Summe der angreifenden Kräfte als auch die Summe der angreifenden Drehmomente Null ist, also

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \quad (2.2)$$

Handelt es sich um Drehungen nur um eine Achse, so kann man mit Skalaren rechnen, indem man z. B. eine Drehrichtung, etwa im Uhrzeigersinn als positiv nimmt.

*Beispiel:*

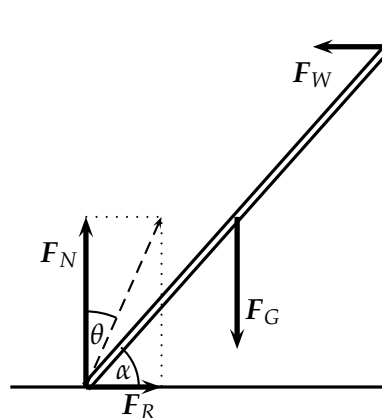


ABB. 2.2 Gleichgewicht einer Leiter

Eine Leiter der Länge  $L$  ist in Abb. 2.2 an eine glatte Wand (keine Reibung) gelehnt und wird am Boden durch Reibung mit der Haftreibungszahl  $\mu$  gehalten. Wie groß muss die Haftreibungszahl mindestens sein, damit die Leiter nicht rutscht?

## 2. Der starre Körper

Man schreibt die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte in x- und y-Richtung an. Die Wände üben auf die Leiter eine zu ihnen senkrechte Normalkraft aus:

$$x: F_R - F_W = 0 \quad y: F_N - F_G = 0$$

Ebenso für das Drehmoment. Die Drehachse kann prinzipiell beliebig gewählt werden, aber praktisch geschickt ist es, sie so zu wählen, dass möglichst viele Drehmomente Null werden. Hier wählen den Auflagepunkt auf dem Boden.

$$F_G \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha - F_W \cdot L \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_W = \frac{1}{2} F_G \cot \alpha$$

Damit ist auch  $F_R = \frac{1}{2} F_G \cot \alpha$  und wegen  $F_R \leq \mu F_N = \mu F_G$  ist schließlich  $\mu \geq \frac{1}{2} \cot \alpha$ . Die Kraft, die die Leiter auf den Boden ausübt ist *nicht* in Richtung der Leiter gerichtet, denn die Resultierende von  $F_R$  und  $F_N$  schließt mit der Vertikalen den Winkel  $\theta$  ein, wobei  $\tan \theta = F_R / F_N = \mu$  ist. Dies ist anders als bei einer durch ein Seil übertragenen Kraft, diese wirkt immer in Richtung des Seils! Nehmen wir den Fall, dass  $\mu = \frac{1}{2} \cot \alpha$  ist, dann schneiden sich die Verlängerungen von  $F_W$ ,  $F_G$  und der Resultierenden von  $F_R$  und  $F_N$  in einem Punkt. Denn die gestrichelte Linie schneidet die Verlängerung von  $F_W$  im Abstand  $L \sin \alpha \tan \theta = L \mu \sin \alpha = L/2 \cot \alpha \sin \alpha = L/2 \cos \alpha$  vom Auflagepunkt auf dem Boden. Dies ist aber die Entfernung des Mittelpunkts.

### 2.1.3. Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

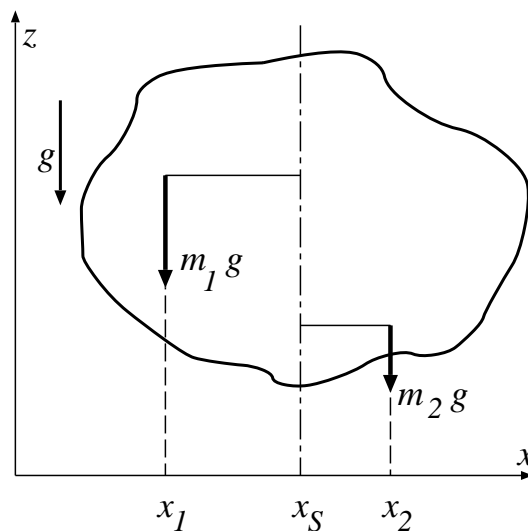


ABB. 2.3 Zur Berechnung des Drehmoments

Im Schwerpunkt ist die Summe der angreifenden Drehmomente immer Null.

## 2.2. Bewegungsgleichung starrer Körper

Zur Berechnung geht man koordinatenweise vor, es gilt

$$m_1 g(x_S - x_1) + \dots + m_n g(x_S - x_n) = 0 \Rightarrow$$

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Entsprechend für die anderen Koordinaten. Damit kann man die Vektorform dieser Gleichungen angeben:

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{r}_S = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (2.3)$$

Unterstützt man den Körper im Schwerpunkt, dann bleibt er in jeder Lage im Gleichgewicht. Daher kann man den Schwerpunkt als Angriffspunkt des Körpergewichts wählen.

## 2.2. Bewegungsgleichung starrer Körper

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus einer Translations- und einer Rotationsbewegung zusammen.

### 2.2.1. Winkelgeschwindigkeit und -Beschleunigung

Rotiert ein Körper um eine feste Achse, dann bewegt sich ein beliebiges Masse- teilchen des Körpers auf einem Kreis mit Radius  $r$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Dabei hängt die Geschwindigkeit des Teilchens vom Abstand  $r$  von der Drehachse ab. Es gilt die bekannte Beziehung  $v = \omega r$ .

Ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  konstant, so liegt eine gleichförmige Kreisbewegung vor. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor, zu ihrer Richtung vgl. den Abschnitt [1.3](#)

Äußere Kräfte bewirken eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit, also eine Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Analog zu den verschiedenen Arten der Bewegung längs einer Geraden, definiert man die Rotationsbewegungen eines starren Körpers um eine feste Achse:

<b>gleichförmige Rotation</b>	$\alpha = 0$	$\omega = \omega_0$	$\phi = \omega \cdot t$
<b>gleichmäßig beschleunigte Rotation</b>	$\alpha = \alpha_0$	$\omega = \alpha \cdot t$	$\phi = \frac{1}{2} \alpha t^2$

## 2. Der starre Körper

### 2.2.2. Bewegungsgleichung der Translation

Der starre Körper ist aus Masselementen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  aufgebaut. An jedem Element  $m_i$  greifen innere Kräfte  $f_i$  und äußere Kräfte  $F_i$  an. Die Bewegungsgleichung für ein Masselement ist dann:

$$m_i a_i = F_i + f_i$$

Zu jeder inneren Kraft gibt es aber nach dem Wechselwirkungsgesetz eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft. Somit gilt für die Summe aller Kräfte und Beschleunigungen:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n f_i$$

Die letzte Summe muss aber Null sein, weil sich alle inneren Kräfte gerade aufheben müssen. Führt man die Gesamtmasse  $M$  des Körpers ein, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i = M \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i}{M} = M a_s$$

Dabei ist  $a_s$  die Beschleunigung des Schwerpunkts. Somit gilt:

$$M a_s = F \quad \left( = \sum_{i=1}^n F_i \right) \quad (2.4)$$

### 2.2.3. Bewegungsgleichung der Rotation

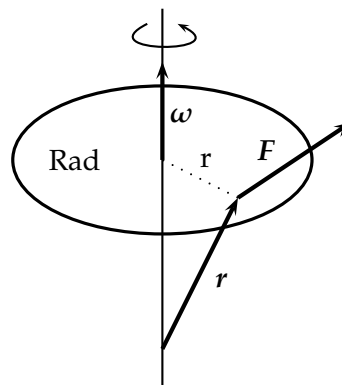


ABB. 2.4 Drehung um eine feste Achse

Äußere Kräfte erteilen dem starren Körper auch ein Drehmoment, sofern ihre Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt geht. In Abb. 2.4 soll die Kraft  $F$  konstant sein. Dann wird das Rad in eine gleichmäßig beschleunigte Rotationsbewegung versetzt.

Beachte, dass der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in dieser Abbildung nicht von der Radmitte, sondern von einem beliebigen Punkt der Radachse ausgeht, trotzdem sind die Gleichungen

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

weiterhin richtig.

Der Abstand des Angriffspunkt der Kraft von der Drehachse ist mit  $r$  bezeichnet.

#### 2.2.4. Rotationsenergie

Das sich drehende Rad hat Energie gespeichert: das ist die kinetische Energie der Massenelemente. Die Energiezunahme ist gleich der von der angreifenden Kraft verrichteten Arbeit.

Innerhalb der Zeit  $t$  verrichtet die Kraft die Arbeit:

$$W = F_s s = Fr\phi = Fr \cdot \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Die Rotationsenergie ist die Summe der kinetischen Energien der Massenelemente:

$$E_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \alpha^2 t^2$$

Da  $E_{\text{rot}} = W$  gilt, folgt

$$Fr = \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = J\alpha \quad \text{mit} \quad J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Die Größe  $J$  heißt *Trägheitsmoment* (englisch: rotational inertia oder moment of inertia) des starren Körpers. Es hängt von der gewählten Drehachse ab. Es spielt für Rotationsbewegungen dieselbe Rolle wie die Masse bei Translationsbewegungen. Das Symbol für das Trägheitsmoment ist nicht einheitlich: man findet  $J$ ,  $I$  und  $\Theta$  in der Literatur.

Damit gelten nun die folgenden Grundbeziehungen:

$$\tau = J\alpha \quad \text{und} \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (2.5)$$

Durch die Einführung der Rotationsenergie kann man die kinetische Energie in einen Anteil der Translation  $\frac{1}{2} m v_s^2$  und einen Anteil der Rotation  $\frac{1}{2} J \omega^2$  aufspalten. Dies ist in der Energieerhaltung (vgl. Abschnitt 1.4.1) zu berücksichtigen.

#### 2.2.5. Drehimpuls

Jedes Massenelement  $m_i$  hat den Drehimpuls  $L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega$ , der Gesamtdrehimpuls  $L$  ist also

$$L = \sum L_i = \sum m_i r_i^2 \omega = \left( \sum m_i r_i^2 \right) \omega = J\omega$$

## 2. Der starre Körper

Diese Beziehung gilt nur bei festgehaltener Drehachse. Wird die Drehachse nicht festgehalten, dann ist die Richtung von  $L$  und  $\omega$  i.a. nicht dieselbe.

### 2.2.6. Translation vs. Rotation

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	$v$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega$
Beschleunigung	$a$	Winkelbeschleunigung	$\alpha$
Masse	$m$	Trägheitsmoment	$J = mr^2$
Impuls	$p$	Drehimpuls	$L$
Kraft	$F$	Drehmoment	$\tau$
kin. Energie	$E_{\text{kin}}$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}}$

### 2.2.7. Drehimpuls und Drehmoment

Wie der Impuls eines Systems durch einen Kraftstoß geändert werden kann, so wird der Drehimpuls eines Systems durch die Einwirkung eines Drehmoments während eines Zeitraums  $\Delta t$  geändert. Da  $L = J\omega$  ist kann man aus Gleichung (2.5) folgern:

$$\tau = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad (2.6)$$

Diese Beziehung ist auch richtig, wenn die Richtungen von  $\tau$  und  $L$  nicht parallel sind. Die *Änderung* von  $L$  zeigt immer in Richtung von  $\tau$ . Das bedeutet, dass der Drehimpulsvektor versucht, sich in Richtung des angreifenden Drehmoments zu stellen.

In der Abb. 2.5 ist die Bewegung eines Kreisels unter dem Einfluss der Schwerkraft gezeigt. Die Kreiselachse wird an der Stelle  $A$  unterstützt, das Gewicht des Kreisels versucht die Achse nach unten zu kippen. Dadurch entsteht ein Drehmoment  $\tau$ . Diesem ist die Änderung des Drehimpulses  $\Delta L$  parallel. Die Kreiselachse bewegt sich also nicht nach unten, sondern nach hinten (na ja, nur so lange die Drehbewegung schnell genug ist).

Auch die Erdachse zeigt eine Präzessionsbewegung: Die Erde ist keine vollkommene Kugel, sondern ein Ellipsoid und die Erdachse ist gegenüber der Erdbahngeneigt, daher versucht die Anziehungskraft der Sonne die Erdachse aufzurichten. Diesem Versuch weicht die Achse durch eine Bewegung quer dazu aus. Dies führt zu einer Präzession der Erdachse, deren Dauer etwa 26000 Jahre beträgt. Der Himmelsnordpol liegt nicht zu allen Zeiten beim Polarstern, sondern beschreibt einen Kreis mit  $2 \cdot 23,5^\circ$  am Himmel auf dessen Umfang der Polarstern liegt.

Ein Kreiselkompass ist ein in allen Richtungen drehbar gelagerter Kreisel. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses zeigt seine Achse stets in dieselbe Richtung.

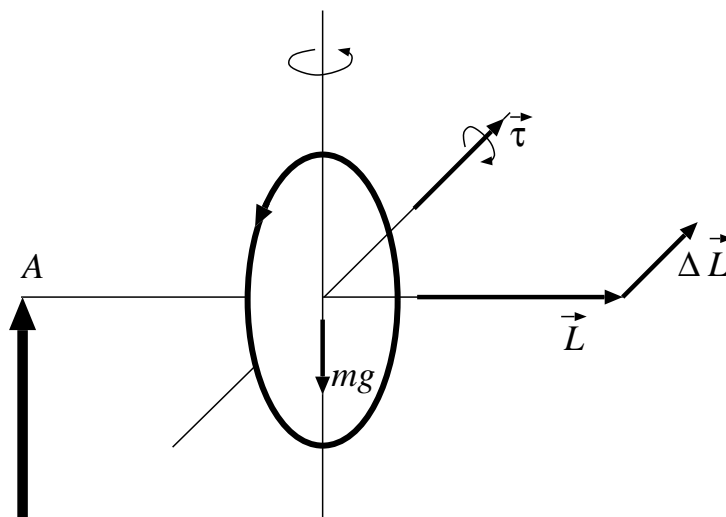


ABB. 2.5 Präzession eines Kreisels unter dem Einfluss der Schwerkraft

## 2.3. Berechnung von Trägheitsmomenten

Die Definition des Trägheitsmoments ist

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \longrightarrow \int r^2 dm$$

Die zweite Gleichung entsteht durch Grenzübergang, wenn man unendlich viele Massenelemente zu betrachten hat, aus denen sich der Körper zusammensetzt.

### 2.3.1. Steinerscher Satz

Das Trägheitsmoment ist von der gewählten Drehachse abhängig. Der Steinersche Satz erlaubt die Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich jeder parallelen Drehachse, wenn man ein Trägheitsmoment kennt. Er lautet:

$$J_A = J_S + M \cdot a^2 \quad (2.7)$$

Dabei ist  $J_A$  das Trägheitsmoment bez. einer Achse durch  $A$  und  $J_S$  das Trägheitsmoment bez. einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt.  $a$  ist der Abstand dieser Achsen.

*Beweis*

In der Abb. 2.6 sollen die Achsen durch  $A$  und  $S$  senkrecht zur Zeichenebene stehen. Der Schwerpunkt  $S$  sei im Koordinatenursprung. Dann gilt:

$$J_A = \int r_A^2 dm \quad J_S = \int r_S^2 dm$$

## 2. Der starre Körper

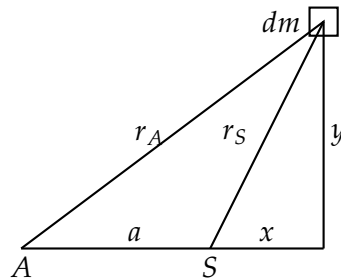


ABB. 2.6 zum Steinerschen Satz

$$r_A^2 = (a + x)^2 + y^2 \quad y^2 = r_S^2 - x^2$$

$$J_A = \int (a^2 + 2ax + r_S^2) dm = Ma^2 + 2a \int x dm + J_S$$

Der zweite Summand rechts ist nach Definition des Schwerpunkts  $2aMx_S = 0$ . Damit ist der Steinersche Satz bewiesen.

Bei flächenhaften Körpern (Scheiben) unterscheidet man zwischen dem »äquatorialen« und dem »polaren« Trägheitsmoment. Ersteres liegt vor, wenn die Achse in der Ebene des Körpers liegt, letzteres, wenn die Achse senkrecht zur Scheibe steht.

Steht die Scheibe in der x-y-Ebene, dann sind die Trägheitsmomente bez. der Achsen gegeben durch ( $J_z$  ist dann ein polares,  $J_x$  und  $J_y$  sind äquatoriale Trägheitsmomente):

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$$

$$J_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = J_x + J_y \quad (2.8)$$

### 2.3.2. Trägheitsmomente ausgewählter Körper

Im Folgenden betrachten wir homogene Körper, das heißt die Dichte  $\rho$  der Körper sei an jeder Stelle gleich. Die Gesamtmasse ist jeweils  $M$ .

#### 2.3.2.1. Polares Trägheitsmoment eines Zylinders

*Achse ist Zylinderachse:* Der Zylinder der Dicke  $h$  mit Radius  $R$  wird in konzentrische Ringe der Breite  $dr$  zerlegt. Dann ist  $dm = 2\pi r h \rho dr$ . Somit

$$J = \int r^2 dm = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2 \quad (2.9)$$

*Achse auf dem Umfang:* Dies wird mit dem Steinerschen Satz gelöst:

$$J_A = J_S + Ma^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

## 2.3. Berechnung von Trägheitsmomenten

### 2.3.2.2. Polares Trägheitsmoment eines Hohlzylinders

Der innere Radius ist  $R_i$  und der äußere Radius ist  $R_a$ . In Gleichung (2.9) muss man nur die Integration statt von 0 bis  $R$  von  $R_i$  bis  $R_a$  erstrecken:

$$J = \frac{1}{2}M(R_a^2 - R_i^2) \quad (2.10)$$

### 2.3.2.3. Äquatoriales Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe

Die Achse geht durch die Scheibenmitte: Da aus Symmetriegründen  $J_x = J_y$  ist, gilt nach (2.8)  $J_{\text{pol}} = 2J_x$  und somit:

$$J = \frac{1}{4}MR^2 \quad (2.11)$$

Achse ist Tangente der Scheibe: Mit Steinerschem Satz:

$$J_A = J_S + Ma^2 = \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$$

Achse hat Abstand  $a$  von Scheibenmitte: Mit Steinerschem Satz:

$$J_A = J_S + Ma^2 = \frac{1}{4}MR^2 + Ma^2 = M \left( \frac{R^2}{4} + a^2 \right)$$

### 2.3.2.4. Trägheitsmoment einer Kugel

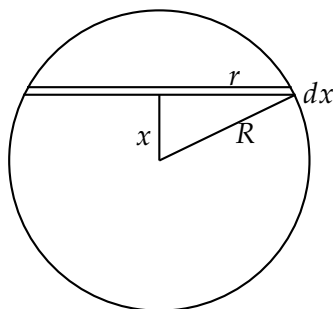


ABB. 2.7 Zum Trägheitsmoment der Kugel

Die Achse gehe durch den Mittelpunkt. Wie in Abb. 2.7 wird die Kugel in Scheiben senkrecht zur Drehachse zerlegt. Gemäß (2.9) hat eine solche Scheibe das Trägheitsmoment

$$dJ = \frac{1}{2}dMr^2 \quad \text{mit} \quad dM = \rho r^2 \pi dx \Rightarrow$$

## 2. Der starre Körper

$$dJ = \frac{1}{2}\pi r^4 dx = \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - x^2)^2 dx \Rightarrow$$
$$J = \int_{-R}^R dJ = \pi\rho \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \frac{2}{5} R^2$$

Somit gilt

$$J = \frac{2}{5}MR^2 \quad (2.12)$$

### 2.3.2.5. Trägheitsmoment eines dünnen Stabes

Achse senkrecht zum Stab durch den Schwerpunkt: Ihre Querschnittsfläche sei  $A$  und die Länge sei  $L$ . Der Stab wird in kleine Stücke der Dicke  $dx$  im Abstand  $x$  von der Achse zerlegt. Also  $dm = \rho A dx$ . Es ist dann  $M = \rho AL$ .

$$J = \int x^2 dm = \rho A \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12}ML^2 \quad (2.13)$$

Achse senkrecht zum Stab durch Stabende:

$$J_A = J_S + Ma^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

### 2.3.2.6. Polares Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte

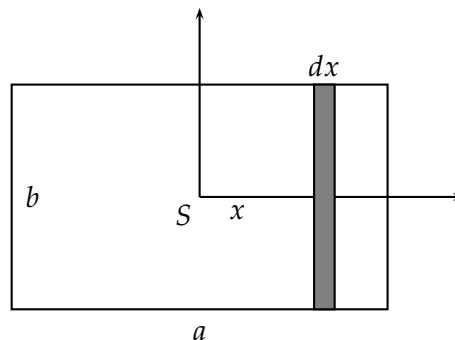


ABB. 2.8 Zum Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte

Die Achse gehe durch den Schwerpunkt der Platte. Sie wird gemäß Abb. 2.8 in rechteckige Streifen zerlegt. Jeder solche Streifen hat bez. einer Achse durch seinen Schwerpunkt nach (2.13) das Trägheitsmoment  $dm \cdot b^2/12$  mit der Masse

$dm = hb\rho dx = Mdx/(ab)$ . Bezüglich einer dazu parallelen Achse durch den Schwerpunkt der Platte also nach Steiner

$$dJ = \frac{1}{12}dm \cdot b^2 + dm \cdot x^2 = \frac{M}{a} \left( \frac{b^2}{12} + x^2 \right) dx$$

$$J = 2 \frac{M}{a} \int_0^{a/2} \left( \frac{b^2}{12} + x^2 \right) dx = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{12} M d^2 \quad \text{mit} \quad d^2 = a^2 + b^2 \quad (2.14)$$

### 2.3.3. Bestimmung des Trägheitsmoments über Ähnlichkeiten

Lässt sich ein Körper in zu ihm ähnliche Teilkörper zerlegen, dann kann man mittels des Steinerschen Satzes sein Trägheitsmoment ohne Integration ermitteln.

*Rechteckige Platte:* Dazu macht man für das Trägheitsmoment den Ansatz:  $J = k \cdot Mr^2$  und versucht die Konstante  $k$  zu bestimmen.

Die rechteckige Platte von Abb. 2.8 kann man in vier Teilrechtecke mit den Seiten  $a/2$  und  $b/2$  zerlegen. Mit dem Steinerschen Satz drückt man nun das Trägheitsmoment der Platte durch die Trägheitsmomente der Teilplatten aus, dabei ist  $r$  mit  $r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2$  die Diagonale einer Teilplatte.

$$J = 4 \left( k \cdot \frac{M}{4} \left( \frac{r}{2} \right)^2 + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{16} (a^2 + b^2) \right)$$

Setzt man beide Trägheitsmomente gleich, dann bekommt man  $k = \frac{1}{3}$  und unter Beachtung von  $d = 2r$  dann wieder  $J = \frac{1}{12} M d^2$ .

Kompliziertere Trägheitsmomente kann man mit Hilfe des Trägheitstensors berechnen. Siehe dazu den entsprechenden Abschnitt in [2].

## 2.4. Kreisel

Dieser Abschnitt ist mathematisch anspruchsvoller als die bisherigen. Es wird der Trägheitstensor und die Summenkonvention verwendet, vgl. dazu die Abschnitte in [2]. Für die Behandlung komplexerer Vektorausdrücke vgl. [1]. Ausführlichere Darstellungen der Kreiselbewegung findet man in Büchern über theoretische Mechanik etwa in [4], Band I.

## 2. Der starre Körper

### 2.4.1. Kreiselbewegungen

Für ein System von Massenpunkten (Kreisel) ist der Drehimpuls  $L$  und das Drehmoment  $\tau$  wie üblich durch

$$L = \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n \quad \text{mit} \quad \dot{L} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.15)$$

definiert, wobei nun die Ortsvektoren von einem festen Punkt des Kreisels aus gezählt werden. Da bei der Bewegung alle Abstände  $|\mathbf{r}_n|$  gleich bleiben müssen, gilt

$$d\mathbf{r}_n = d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n dt \quad (2.16)$$

Damit bekommt man für den Drehimpuls:

$$L = \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) = \sum_n m_n [\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{r}_n^2 - \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_n] = \boldsymbol{\omega} \mathbf{J} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (2.17)$$

wobei  $\mathbf{J} = \int dm (\mathbf{r}^2 \mathbb{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) = \sum m_n (\mathbf{r}^2 \mathbb{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$  der Trägheitstensor und  $\mathbb{1}$  der Einheitstensor ist.

Ähnlich kann man die kinetische Energie in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit darstellen:

$$E_{\text{kin}} = \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{\mathbf{r}}_n^2 = \sum_n \frac{1}{2} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \sum_n \frac{1}{2} m_n \boldsymbol{\omega} [\mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (2.18)$$

Für den Kreisel gelten also die folgenden Gleichungen:

$$L = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} L \boldsymbol{\omega} \quad \dot{L} = \boldsymbol{\tau} \quad \dot{E}_{\text{kin}} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\tau} \quad (2.19)$$

wobei die letzte Gleichung aus

$$\dot{E}_{\text{kin}} = \sum_n \dot{\mathbf{r}}_n \mathbf{F}_n = \sum_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \mathbf{F}_n = \boldsymbol{\omega} \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\tau}$$

folgt.

### 2.4.2. Kräftefreier Kreisel

Ein kräftefreier Kreisel wird im Schwerpunkt unterstützt, so dass die resultierende Schwerkraft keine Kraft auf ihn ausübt. Daher kann man  $\boldsymbol{\tau} = 0$  setzen, damit sind sowohl der Drehimpuls als auch die kinetische Energie gemäß Gl. (2.19) konstant. Zerlegt man  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{a}$  in Richtung und Betrag, dann ist das Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $\mathbf{a}$  gegeben durch  $J(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \mathbf{J} \mathbf{a}$ . Zu jedem symmetrischen Tensor, also auch zum Trägheitstensor kann man ein Tensorellipsoid (vgl. [2]) bestimmen, das durch die Gleichung

$$\mathbf{x} \mathbf{J} \mathbf{x} = x^i J_{ik} x^k = 1 \quad \text{Summenkonvention!}$$

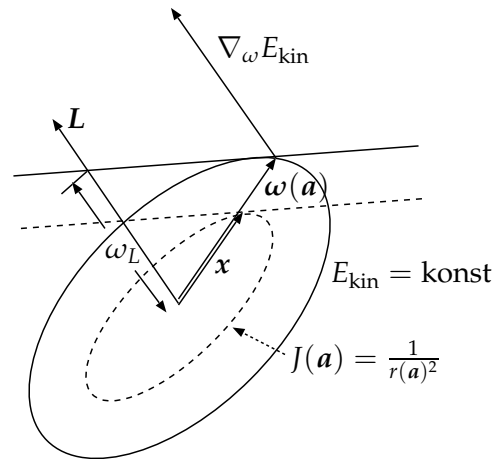


ABB. 2.9 Lage des Trägheitsellipsoids  $J(\mathbf{a}) = 1/r(\mathbf{a})^2$  und des Energieellipsoids  $E_{\text{kin}}(\boldsymbol{\omega}) = \text{konst}$  bezüglich des Drehimpulses  $\mathbf{L}$ .

bestimmt ist. Mit  $\mathbf{x} = r\mathbf{a}$  lautet diese Gleichung

$$\mathbf{a}\mathbf{J}\mathbf{a} = J(\mathbf{a}) = \frac{1}{r(\mathbf{a})^2}$$

Zu jeder vom Mittelpunkt des Trägheitsellipsoids ausgehenden Richtung  $\mathbf{a}$  liefert also der Abstand  $r(\mathbf{a})$  ein Maß für das zugehörige Trägheitsmoment. Nun kann man die kinetische Energie darstellen in der Form

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{a}\mathbf{J}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\omega^2 J(\mathbf{a}) = \frac{\omega^2}{2r^2} \quad (2.20)$$

Damit ist bei vorgegebener kinetischer Energie der Betrag der Winkelgeschwindigkeit festgelegt, die Richtung darf allerdings noch beliebig sein. Es gilt ja nun:  $\omega = \sqrt{2E_{\text{kin}}}r(\mathbf{a})$ . Damit liegen die Endpunkte der bei gegebenen kinetischer Energie möglichen Winkelgeschwindigkeiten auf einem zum (in Abb. 2.9 gestrichelt gezeichneten) Trägheitsellipsoid ähnlichen Ellipsoid, dem Energieellipsoid (in Abb. 2.9 durchgezogen gezeichnet).

Ist nun auch noch der Drehimpuls vorgegeben, dann bleibt von den möglichen Winkelgeschwindigkeiten nur noch eine einzige übrig, denn es ist

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{J} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \otimes \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} E_{\text{kin}} = \text{konst.} \quad (2.21)$$

Da nach Gleichung (2.17) bei konstantem  $\mathbf{L}$  und  $E_{\text{kin}}$  ja immer noch  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}$  gilt, muss die Komponente  $\omega_L$  von  $\boldsymbol{\omega}$  in Richtung von  $\mathbf{L}$  ebenfalls konstant sein. In Gl. (2.21) ist der Drehimpuls als Gradient der kinetischen Energie dargestellt. Dieser steht senkrecht auf den Niveaulflächen. Besitzt nun der Drehimpuls die

## 2. Der starre Körper

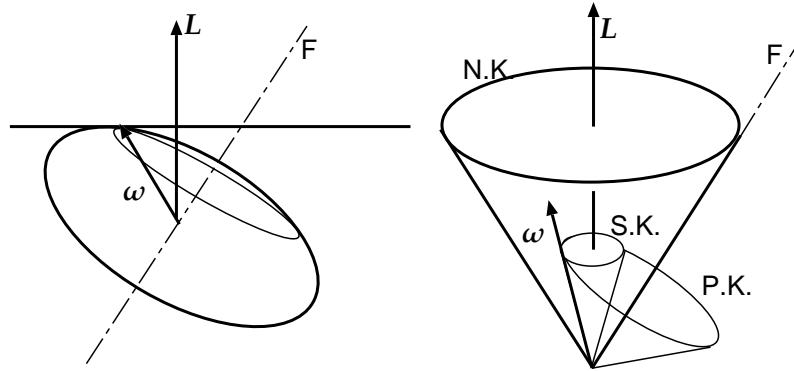


ABB. 2.10 Der kräftefreie abgeplattete Kreisel mit Nutationskegel (N.K), Spurkegel (S.K.) und Polkegel (P.K.). Links das Trägheitsellipsoid und seine Tangentialebene, an der er abrollen muss, rechts die drei Kegel auf denen die diversen Achsen abrollen. F ist die Figurenachse.

in Abb. 2.9 eingetragene Richtung, so muss man diejenige unter den Ebenen mit der Normalen  $L$  aufsuchen, die gleichzeitig Tangentialebene an das Energieellipsoid ist. Im Berührungspunkt von Ellipsoid und Tangentialebene liegt dann die Spitze des Vektors der Winkelgeschwindigkeit, die dann allein bei vorgegebener Energie und vorgegebenen Drehimpuls möglich ist. Die Konstanz von  $\omega_L$  bedingt nun, dass die Tangentialebene raumfest bleibt. Das Energieellipsoid kann also nur solche Bewegungen ausführen, bei denen die Tangentialebene stets berührt wird.

Man kann sich nun noch überlegen, dass das Ellipsoid an der Tangentialebene abrollen muss, ohne zu schleifen. Sobald nämlich die Winkelgeschwindigkeit nicht durch den Berührungspunkt ginge, entstünde ein Schleifen. Daher rollt das Energieellipsoid auf der Tangentialebene entlang. Dasselbe gilt wegen der Ähnlichkeit für das Abrollen des Trägheitsellipsoids auf seiner dazu parallelen Tangentialebene.

### 2.4.2.1. Einige Ergebnisse

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich, also  $\mathbf{J} = J\mathbb{1}$ , so ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel und es gilt  $L = J\omega$ . Nun besitzen  $\omega$  und  $L$  dieselbe Richtung. Die möglichen Kreiselbewegungen sind also Rotationen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine beliebig wählbare Achse.

Etwas interessanter ist der Fall eines rotationssymmetrischen Kreisels mit  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . Nun ist das Trägheitsellipsoid ein verlängertes ( $J_3 > J_1$ ) oder abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Symmetrieachse nennt man die Figurenachse. Beim Abrollen auf der Tangentialebene beschreiben Figurenachse und Drehachse  $\omega$  je einen Kegel um die Achse  $L$ . Die Figurenachse beschreibt den *Nutationskegel*, die Drehachse den *Spurkegel*. Die Punkte, die  $\omega$  nacheinander auf dem Trägheitsellipsoid durchstößt bilden wieder einen Kegel, diesmal um die Figurenachse. Er

wird *Polkegel* genannt.

Der Zeitablauf der Kreiselbewegung wird also dadurch beschrieben, dass der Polkegel am Spurkegel abrollt, wobei sich die Figurenachse gleichzeitig auf dem Nutationskegel bewegt. Spurkegel und Nutationskegel bleiben raumfest. Je nachdem, ob das Rotationsellipsoid verlängert oder abgeplattet ist, rollt der Polkegel mit der Außen- oder Innenseite am Spurkegel ab.

### 2.4.3. EULERSche Kreiselgleichungen

Aus den Grundgleichungen

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{J} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.22)$$

soll nun die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  bestimmt werden. Nun ist zu beachten, dass Trägheitstensor eines sich bewegenden Körpers im allgemeinen auch zeitabhängig sein kann. Nun ist ja:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n = \frac{d}{dt} \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \\ &= \sum_n m_n \dot{\mathbf{r}}_n \times \mathbf{r}_n + \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \\ &= 0 + \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_n) + \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)] = \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Der erste Ausdruck in dieser Gleichung ist  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}$ , der zweite lässt sich noch mit dem Entwicklungssatz umformen zu:

$$\sum_n m_n [\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{r}_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \otimes \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_n] = 0 + \boldsymbol{\omega} \times \left[ \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) \right] = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (2.24)$$

Damit wird Gl. (2.23) zu

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.25)$$

Diese Gleichungen – komponentenweise geschrieben – sind die berühmten *EULERSchen Kreiselgleichungen*. Nun schreiben wir die Komponenten einmal aus (unter Verwendung der Summenkonvention):

$$\dot{\omega}^k J_{ki} + \varepsilon_{ikl} \omega^k J_{lm} \omega^m = \tau_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.26)$$

Ausgeschrieben lautet das für den Fall, dass man sich auf die Einheitsvektoren der Eigenvektoren des Trägheitstensors bezieht; dann sind alle Komponenten von  $\mathbf{J}$  außerhalb der Diagonale Null:

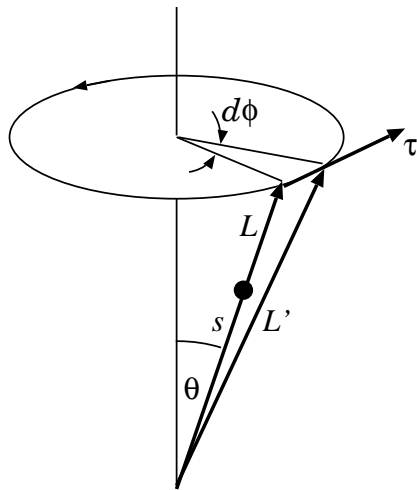
## 2. Der starre Körper

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 J_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= \tau_1 \\ \dot{\omega}_2 J_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) &= \tau_2 \\ \dot{\omega}_3 J_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= \tau_3 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Diese Differentialgleichungen sind tückisch; denn sie sind hinsichtlich der Unbekannten  $\omega_i$  nichtlinear und noch miteinander gekoppelt. Der einfache Fall des Kugelkreisels geht natürlich mühelos. Dann ist ja  $J_1 = J_2 = J_3 = J$  und alle nichtlinearen Glieder verschwinden und das System ist entkoppelt.

Die weitere Behandlung interessanter Fälle – schon des schweren symmetrischen Kreisels – führt auf elliptische Integrale, und das ist zu viel für diesen Abriss. Aber das Folgende kann man noch elementar behandeln:

*Präzession des schweren Kreisels:*



Hier nehmen wir vereinfachend an, dass der Drehimpuls und die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der Figuren- und Schwerpunktschwerachse liege, der außerhalb seines Schwerpunkts unterstützt wird. Gegenüber der Vertikalen (z-Richtung) schließe die Figuren- und Schwerpunktschwerachse den Winkel  $\theta$  ein. Der Schwerpunkt habe den Abstand  $s$  vom Auflagepunkt. Dann bewirkt das im Schwerpunkt angreifende Gewicht das Drehmoment

$$\tau = mgs \sin \theta \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{dL}{dt}$$

Dann gilt für die Beträge:  $dL = \tau dt = mgs \sin \theta dt$ . Damit zeigt  $dL$  (in der Skizze ist das  $L' - L$ ) in Richtung von  $\tau$  (das ist ja schon bekannt).

Aus der Figur erkennt man, dass (im Bogenmaß) gilt:

$$d\phi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{mgs \sin \theta dt}{L \sin \theta}$$

Damit ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt und damit die Figuren- und Schwerpunktschwerachse um die z-Richtung dreht, die sog. *Präzessionsfrequenz*, gegeben durch:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mgs}{L} = \frac{mgs}{J\omega}$$

wobei hier  $J$  das Trägheitsmoment bez. der Figuren- und Schwerpunktschwerachse ist.

## Literatur

- [1] PETER BREITFELD: *Abriss der Vektorrechnung*; Skriptenreihe des SFZ in Bad Saulgau, <http://docs.sfz-bw.de/phag/downinfo.html>; 1999ff; Vektoralgebra und Vektoranalysis.
- [2] PETER BREITFELD: *Sammelsurium zur Mathematik*; Skriptenreihe des SFZ in Bad Saulgau, <http://docs.sfz-bw.de/phag/downinfo.html>; 1999ff; Matrizen, Tensoren, Variationsrechnung.
- [3] DAVID HALLIDAY UND ROBERT RESNICK: *Fundamentals of Physics*; John Wiley & Sons; 1988; Sehr guter allgemeiner Überblick. Es gibt auch eine Ausgabe in deutsch. ISBN: 0-471-63736-X.
- [4] ARNOLD SOMMERFELD: *Vorlesungen über theoretische Physik*; Bd. I – VI; Verlag Harri Deutsch; 1989 – 2002; Paperback Nachdrucke. Die gegen Ende der 40er Jahre des 20. Jh. entstandenen Vorlesungen behandeln die klassische Physik in den Bänden: I. *Mechanik*, II. *Mechanik der deformierbaren Medien*, III. *Elektrodynamik*, IV. *Optik*, V. *Thermodynamik und Statistik*, VI. *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Die Relativitätstheorie ist schon voll berücksichtigt, wenn auch zuweilen in heute nicht mehr ganz üblicher Notation (Sechservektoren und imaginäre Schreibweise der Zeitkoordinate). Insbesondere der Bd. VI, der die partiellen Differentialgleichungen und die sich aus ihnen ergebenden speziellen Funktionen behandelt, ist zeitlos gut. Die ISBN-Nummern sind 3-87144-37x-y, wobei x-y für die Bände I bis VI den Ziffern 4-3, 5-1, 6-X, 7-8, 8-6 und 9-4 entspricht.