

Geometrie

Peter Breitfeld*

Störck-Gymnasium
Bad Saulgau

23. August 2010

In diesem Skript werden Sätze der elementaren ebenen Geometrie behandelt, die man häufig in Bundeswettbewerb-Aufgaben anwenden kann. Dabei kommen nur solche Themen zur Sprache, die üblicherweise in der Schule gar nicht behandelt, bzw. nur kurz vor den Ferien gestreift werden.

Inhaltsverzeichnis

- 1 *Beziehungen am Kreis* • 2
 - 1.1 Umfangswinkelsatz • 2
 - 1.2 Sehnen-Sekantensatz • 3
 - 1.2.1 Sehnen-Sekantensatz für einen Kreis • 3
 - 1.2.2 Weitere Sätze zum Umfangswinkelsatz • 3
 - 1.2.3 Sekantensatz für zwei Kreise bzw. Kreis und Gerade • 4
 - 1.3 Satz des Ptolemäus • 5
- 2 *Beziehungen am Dreieck* • 7
 - 2.1 Inkreis und Ankreise • 7
 - 2.1.1 Grundlegende Beziehungen • 7
 - 2.1.2 Ähnlichkeiten und Heronsche Flächenformel • 8
 - 2.1.3 Formel von Brahmagupta • 9
 - 2.2 Mehr zu Umkreis und Inkreis • 9
 - 2.2.1 Der Südpolsatz • 9
 - 2.2.2 Der Satz von Euler • 10
 - 2.3 Sätze von Menelaos und Ceva • 11
 - 2.4 Harmonische Teilung und Kreis des Apollonius • 13
 - 2.4.1 Harmonische Teilung • 13
 - 2.4.2 Harmonische Punkte am Kreis • 14

* E-Mail: phbrf@t-online.de <http://www.pBreitfeld.de>

1 Beziehungen am Kreis

2.4.3 Harmonische Punkte der Winkelhalbierenden • 14

2.4.4 Weitere Beziehungen • 15

2.4.5 Das harmonische Mittel • 15

2.5 Euler-Gerade und Feuerbach-Kreis • 17

2.5.1 Beweis der Euler-Gerade • 17

2.5.2 Beweis zum Feuerbach-Kreis • 17

3 Inversion am Kreis • 19

3.1 Definition und Eigenschaften der Inversion • 19

3.2 Beweis der Berühreigenschaften des Feuerbachkreises • 21

1. Beziehungen am Kreis

1.1. Umfangswinkelsatz

Das ist einer der fundamentalen Sätze am Kreis (vgl. Abb. 1). Er besagt:

Satz 1.1 Der Winkel $\gamma = \sphericalangle(BCA)$ auf dem Kreis über der Strecke AB ist immer gleich dem halben Mittelpunktswinkel $\delta = \frac{1}{2}\sphericalangle(BMA)$. In anderen Worten: Die Ortslinie aller Punkte, von denen aus die Strecke AB unter demselben Winkel erscheint, ist der Fasskreis.

Ein eleganter und einfacher Beweis ist, den Streckenzug AMB längs des Vektors \overrightarrow{MC} zu verschieben. Dann entstehen wie in Abb. 1 rechts zwei Rauten $MBB'C$ und $MAA'C$. Da die Rautendiagonalen Winkelhalbierende sind, entsteht die Gleichheit der eingezeichneten Winkel, woraus der Umfangswinkelsatz sofort folgt.

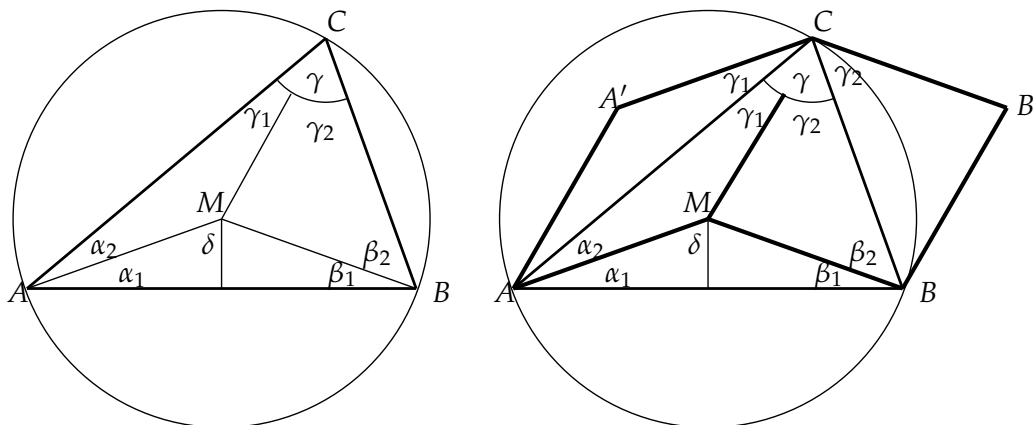


ABB. 1 Zum Umfangswinkelsatz

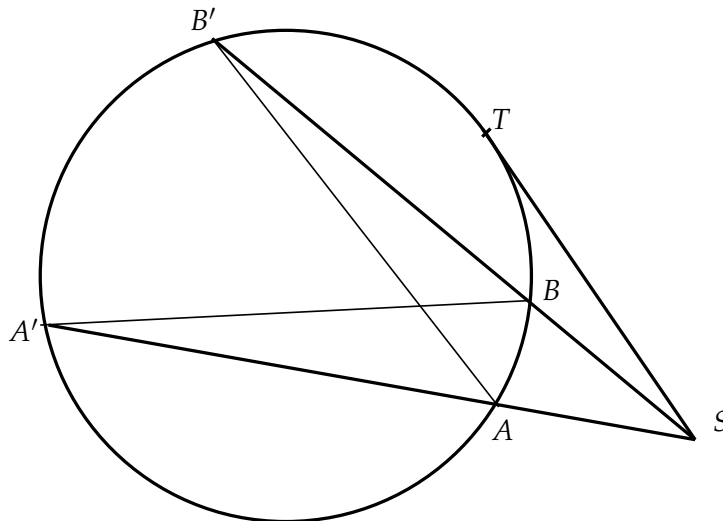


ABB. 2 Zum Sehnen-Sekantensatz

1.2. Sehnen-Sekantensatz

1.2.1. Sehnen-Sekantensatz für einen Kreis

Satz 1.2 *Zeichnet man von einem Punkt S innerhalb oder außerhalb des Kreises Sekanten (bzw. Sehnen) an den Kreis, dann sind die Produkte der von S aus gezählten Sekantenabschnitte gleich, in Abb. 2, also*

$$SA \cdot SA' = SB \cdot SB' = ST^2 \quad (1)$$

Der Beweis ist leicht: Zunächst sind die Winkel $\sphericalangle(BA'A)$ und $\sphericalangle(AB'B)$ gleich, weil sie Umfangswinkel über der Strecke AB sind, somit sind die Dreiecke SBA' und SAB' ähnlich, weil sie ja noch den gemeinsamen Winkel bei S haben. Damit gilt

$$SA' : SB' = SB : SA$$

woraus Gleichung (1) sofort folgt.

Der Fall der Tangente, der natürlich nur vorkommen kann, wenn S außerhalb des Kreises liegt, folgt, wenn man B und B' zusammenfallen lässt.

Der Beweis für S innerhalb des Kreises geht ganz analog mit ähnlichen Dreiecken und Umfangswinkelsatz (ist langweilig).

1.2.2. Weitere Sätze zum Umfangswinkelsatz

Satz 1.3

I. *In einer Dreiecksecke ist der Winkel zwischen dem Umkreisradius und der Höhe gleich der Differenz der beiden anderen Dreieckswinkel.*

1 Beziehungen am Kreis

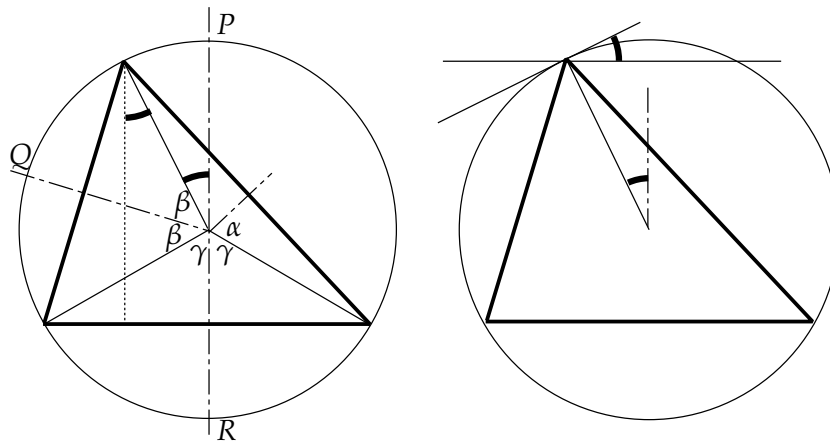


ABB. 3 Mittelsenkrechten, Höhen und Umkreisradien

II. Analoges gilt für die Mittelsenkrechte und den Umkreisradius

III. Die Tangente in einer Dreiecksecke an den Umkreis schneidet die Gegenseite unter einem Winkel, der gleich der Differenz der beiden Dreieckswinkel an dieser Seite ist.

Die Begründung folgt sofort aus Abbildung 3. Im linken Bild gehört der Bogen RQ zum Winkel $\beta + \gamma$, somit als Rest zu 180° der Bogen PQ zum Winkel α . Damit ist der gesuchte »dicke« Winkel

$$\alpha + \beta + \gamma - (\beta + \gamma) - \beta = \alpha - \beta$$

womit (I) und (II) bewiesen sind. Um (III) zu beweisen, genügt es, das rechte Bild scharf anzusehen.

1.2.3. Sekantensatz für zwei Kreise bzw. Kreis und Gerade

Satz 1.4 Eine Drehgerade durch das Streckzentrum zweier Kreise schneidet diese so, dass das Streckenprodukt der Abschnitte vom Zentrum bis zu zwei Gegenpunkten auf den Kreisen invariant ist, also gilt (vgl. Abbildung 4):

$$SA_1 \cdot SB_2 = SA_2 \cdot SB_1 = ST_1 \cdot ST_2$$

Nun zum Beweis: Beide Kreise gehen durch zentrische Streckung auseinander hervor, also muss $SA_2 = kSA_1$ und $SB_2 = kSB_1$ gelten. Damit folgt nach dem Sehnen-Sekantensatz:

$$ST_1^2 \cdot ST_2^2 = SA_1 \cdot SB_1 \cdot SA_2 \cdot SB_2 = \begin{cases} SA_1 \cdot \frac{1}{k}SB_2 \cdot kSA_1 \cdot SB_2 = SA_1^2 \cdot SB_2^2 \\ \frac{1}{k}SA_2 \cdot SB_1 \cdot SA_2 \cdot kSB_1 = SB_1^2 \cdot SA_2^2 \end{cases}$$

Ein entsprechender Satz gilt für einen Kreis und eine Gerade

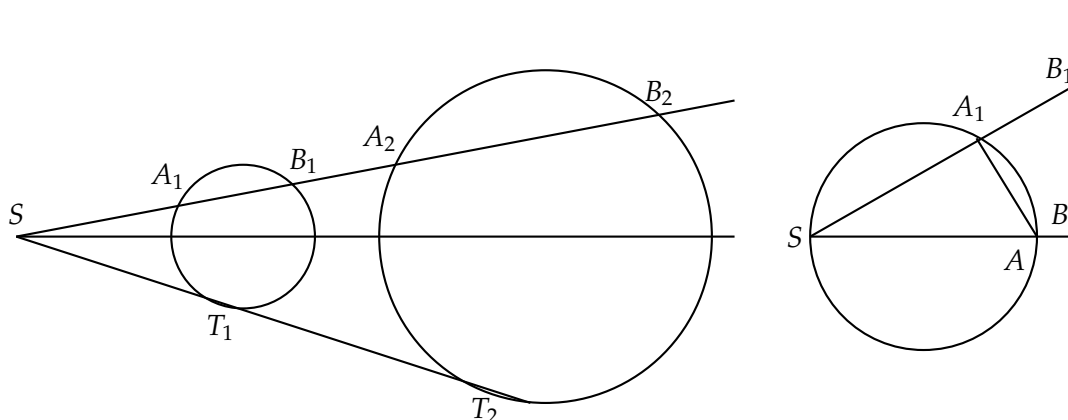


ABB. 4 Zum Sekantensatz für zwei Kreise und für Kreis und Gerade

Satz 1.5 Eine Drehgerade durch einen Kreispunkt S schneidet den Kreis und eine Gerade, welche auf dem Kreisdurchmesser durch S senkrecht steht so, dass das Produkt der Abschnitte vom Drehpunkt zum Kreis und zur Geraden invariant ist; es gilt also

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA \cdot SB$$

Der Beweis ist ein Einzeiler (Abb. 4 rechts): Weil die Dreiecke SAA_1 und SBB_1 ähnlich sind (gemeinsamer Winkel bei S und beide rechtwinklig), gilt $SA : SA_1 = SB_1 : SB$, woraus die Behauptung folgt.

1.3. Satz des Ptolemäus

Satz 1.6 Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten.

Zum Beweis betrachten wir die Abb. 5. Zuerst wird die Hilfslinie DE so eingezeichnet, dass $\sphericalangle(ADE) = \sphericalangle(BDC) = \varepsilon$ wird. Dann hat man folgende ähnliche Dreiecke:

- $ADE \sim BCD$, denn beide Dreiecke haben den Winkel ε nach Konstruktion und den Winkel α als Umfangswinkel über der Seite CD .
- $CDE \sim ABD$, denn jedes Dreieck enthält β als Umfangswinkel über AD . Des Weiteren ist $\sphericalangle(EDC) = \sphericalangle(ADB)$, denn beide sind $\sphericalangle(ADC) - \varepsilon$.

Aus der ersten Ähnlichkeit folgt nun:

$$AD : BD = AE : BC \quad \Rightarrow \quad AD \cdot BC = AE \cdot BD$$

und aus der zweiten:

$$BA : CE = BD : CD \quad \Rightarrow \quad AB \cdot CD = CE \cdot BD$$

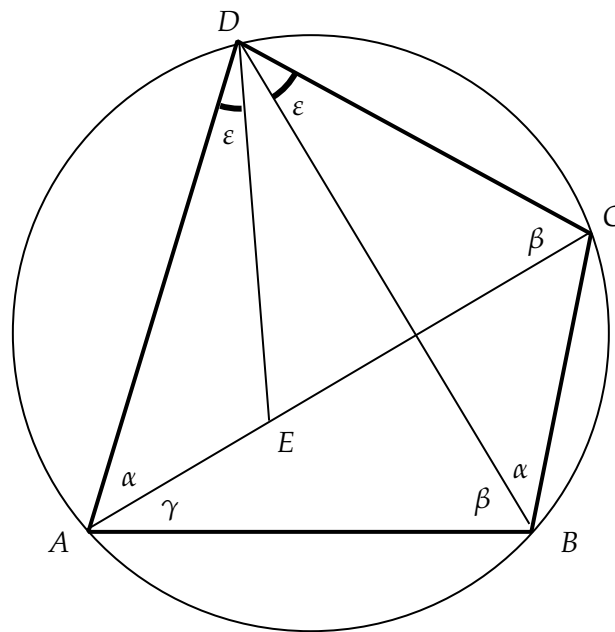


ABB. 5 Zum Satz des Ptolemäus

Addiert man diese Gleichungen, dann erhält man:

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$$

Das war die Behauptung.

HISTORISCHE ANMERKUNG

Dieser Satz wurde von PTOLEMÄUS zur Herstellung seiner Sehentafeln verwendet. Sehmentafeln wurden früher anstelle von Sinustafeln verwendet, die ja »Halbsehmentafeln« sind. Dazu muss man nur den Satz spezialisieren, indem man AC als Kreisdurchmesser des Einheitskreises nimmt. Dann ist $AD = \cos \alpha$, $DC = \sin \alpha$, $AB = \cos \gamma$ und $BC = \sin \gamma$. In diesem Kreis ist der Umkreisradius $r = \frac{1}{2}$ und damit wegen des Umfangswinkelsatzes $BD = 2r \sin(\alpha + \gamma) = \sin(\alpha + \gamma)$. Setzt man das in den Satz den PTOLEMÄUS ein, so bekommt man:

$$\cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha = \sin(\alpha + \gamma)$$

das Additionstheorem des Sinus.

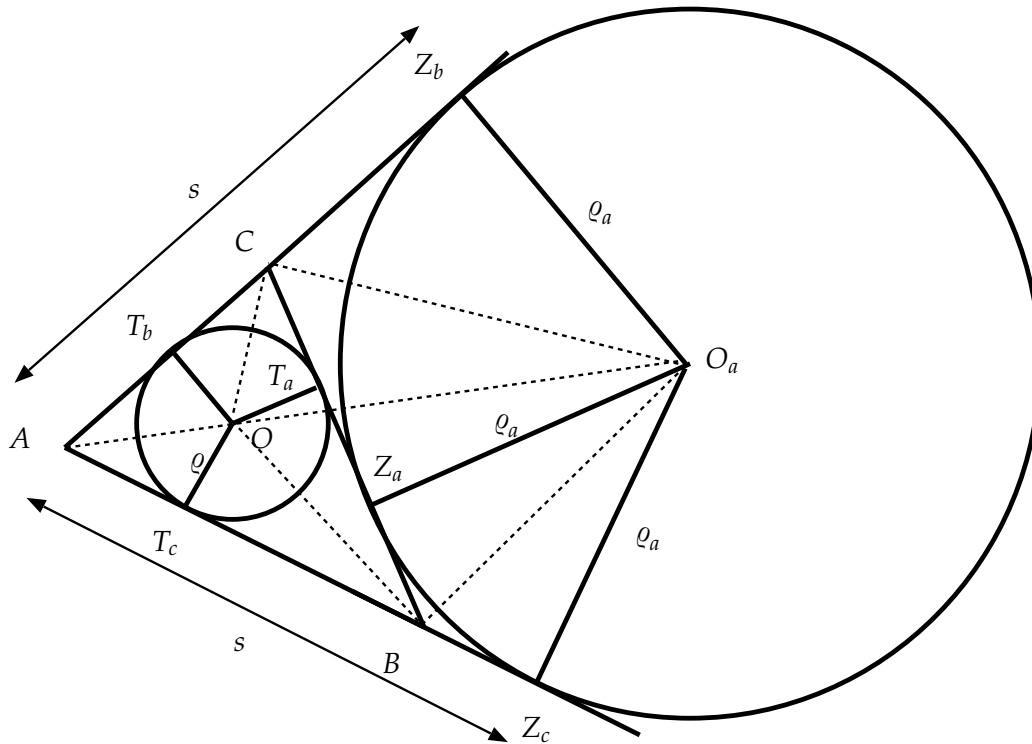


ABB. 6 Inkreis und Ankreis zur Seite a

2. Beziehungen am Dreieck

2.1. Inkreis und Ankreise

2.1.1. Grundlegende Beziehungen

Wohlbekannt ist die Tatsache, dass jedes Dreieck einen Inkreis besitzt, dessen Mittelpunkt O der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden ist. Daneben gibt es auch noch drei Ankreise mit den Mittelpunkte O_a , O_b und O_c . Diese drei Mittelpunkte bilden das *Ankreisdreieck*, auf dessen Seiten auch die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen, denn die Seiten des Ankreisdreiecks sind ja die entsprechenden Winkelhalbierenden der Außenwinkel des Dreiecks.

In Abb. 6 ist ein Dreieck mit Inkreis und dem Ankreis an die Seite $a = BC$ gezeichnet. Die gepunkteten Linien sind die Winkelhalbierenden.

Zunächst wollen wir die Länge der Stücke zu den Inkreis-Berührungspunkten bestimmen. Setzt man z. B. $x = AT_c$, dann ist – weil Tangentenabschnitte immer gleich lang sind – auch $AT_b = x$; dann aber $BT_c = BT_a = c - x$ und $CT_b = CT_a = a - (c - x)$. Dann muss gelten:

$$2x + 2(c - x) + 2(a - c + x) = a + b + c \equiv 2s \quad \Rightarrow \quad x = s - a$$

wobei wir s für den halben Dreiecksumfang gesetzt haben. Damit ist also das

2 Beziehungen am Dreieck

Stück von der Dreiecksecke bis zum Inkreis-Berührungspunkt immer s minus Länge der Gegenseite, also

$$AT_c = AT_b = s - a \quad BT_a = BT_c = s - b \quad CT_b = CT_a = s - c \quad (2)$$

Nun betrachten wir die Berührungspunkte der Ankreise. Zunächst ist ja wieder wegen der Gleichheit von Tangentenabschnitten: $BZ_a = BZ_c$ und $CZ_a = CZ_b$ und $AZ_b = AZ_c$. Nun kann man wieder für den Umfang schreiben:

$$2s = AB + BZ_a + Z_aC + AC = AZ_c + AZ_b = 2AZ_c \Rightarrow AZ_b = AZ_c = s$$

Das ist ein schönes, leicht merkbares Ergebnis, aus dem nun noch folgt:

$$BZ_a = BZ_c = s - c = CT_a \quad \text{und} \quad CZ_b = CZ_a = s - b = BT_a \quad (3)$$

2.1.2. Ähnlichkeiten und Heronsche Flächenformel

Betrachtet man die Strahlensatzfigur mit Zentrum A und den Parallelenstücken OT_b und O_aZ_b , dann folgt sofort

$$(s - a) : s = AT_b : AZ_b = \varrho : \varrho_a \Rightarrow (s - a)\varrho_a = s\varrho \quad (4)$$

Nun sind des weiteren die beiden Dreiecke BOT_a und BO_aZ_a ähnlich, denn erstens sind beide rechtwinklig und $\sphericalangle(OBT_a) = \sphericalangle(BO_aZ_a)$, da $BO_a \perp BO$ und $OT_a \parallel O_aZ_a$. Daraus folgt die Gleichheit der Verhältnisse

$$BZ_a : \varrho = \varrho_a : BT_a \Rightarrow \varrho\varrho_a = BT_a \cdot BZ_a = (s - b)(s - c) \quad (5)$$

Analog muss dann auch gelten

$$\varrho\varrho_b = (s - a)(s - c) \quad \varrho\varrho_c = (s - a)(s - b)$$

Denkt man sich das Dreieck ABC aus den drei Teildreiecken mit ABO , BCO und ACO zusammengesetzt, dann bekommt man für seine Fläche $F = \varrho s$. Wegen Gleichung (4) gilt dann

$$\varrho s = \frac{\varrho_a}{s}(s - a)s = \varrho_a(s - a) = \varrho_b(s - b) = \varrho_c(s - c)$$

und daraus für das Quadrat der Fläche

$$F^2 = \varrho s \varrho_a (s - a) = \varrho \varrho_a s (s - a) = (s - b)(s - c)s(s - a)$$

Wir haben nun die HERONSche Flächenformel gefunden:

$$\text{Dreiecksfläche: } F = \varrho s = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c} \quad (6)$$

Umgekehrt kann man daraus nun auch die Länge des Inkreisradius bestimmen, er ist ja nun einfach $\varrho = F/s$.

2.1.3. Formel von Brahmagupta

Satz 2.1 Die Fläche eines Sehnenvierecks mit den Seiten a, b, c und d ist gegeben durch

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Formel von HERON. Mit $d = 0$ bekommt man ebendiese. Der Beweis soll trigonometrisch geführt werden.

Die Fläche ist die Summe der Dreiecke ADB und BCD , also

$$F = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin \alpha$$

letzteres, weil α und γ zusammen 180° sind. Daraus bekommt man durch Quadrieren:

$$4F^2 = (1 - \cos^2 \alpha)(ad + bc)^2 = (ad + bc)^2 - (ad + bc)^2 \cos^2 \alpha$$

Wendet man den Kosinussatz auf die beiden Teildreiecke an, dann bekommt man:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

Umstellen liefert daraus:

$$2(ad + bc) \cos \alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$$

Das setzen wir in die Fläche ein und bekommen:

$$16F^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

Dies ist die Differenz zweier Quadrate, kann also faktorisiert werden zu

$$\begin{aligned} 16F^2 &= (2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2))(2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)) \\ &= ((a + d)^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - (a - d)^2) \\ &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) \\ &= (2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2d)(2s - 2a) \\ &= 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) \end{aligned}$$

Das wollten wir.

2.2. Mehr zu Umkreis und Inkreis

2.2.1. Der Südpolsatz

In der Abb. 7 werden im Dreieck ABC die Mittelsenkrechten auf den Seiten c und b errichtet. Anschließend zeichnet man die Verbindungsgerade CS ein. Der Winkel ACS ist Umfangswinkel über AB , demnach halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMS$. Dasselbe gilt auf der anderen Seite mit dem

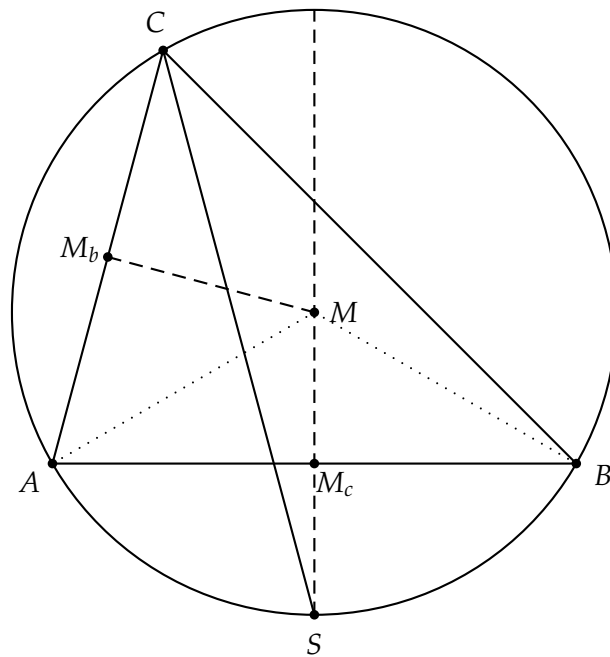


ABB. 7 Zum Südpolsatz

Umfangswinkel über SB ; $\sphericalangle SCB = \frac{1}{2}\sphericalangle SMB$. Da aber wegen der Symmetrie zu MS $\sphericalangle AMS = \sphericalangle SMB$ gilt, muss $\sphericalangle ACS = \sphericalangle BCS$ sein, damit ist CS die Winkelhalbierende in C .

Daraus folgt der sogenannte

Satz 2.2 (Südpolsatz) *In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende durch die gegenüberliegende Ecke auf dem Umkreis.*

2.2.2. Der Satz von Euler

In der Abb. 8 sind O der Inkreismittelpunkt, M der Umkreismittelpunkt. Die Gerade AO ist die Winkelhalbierende und schneidet den Umkreis in L . Durch diesen Punkt geht nach dem Südpolsatz auch die Mittelsenkrechte von BC . Der zweite Schnittpunkt des Umkreises mit dieser Mittelsenkrechten ist S . Der Berührungspunkt des Inkreises ist D . Damit ist $\overline{OD} = \rho$ der Inkreisradius.

Die Dreiecke ADO und SBL sind ähnlich, weil sie beide rechtwinklig (Thaleskreis bei B) sind und in A bzw. S gleiche Umfangswinkel über BL haben. Damit gilt $\overline{OD} : \overline{BL} = \overline{AO} : \overline{SL}$. Weil aber $2r = \overline{SL}$ der Durchmesser des Umkreises ist, folgt als erstes Ergebnis $2r\rho = \overline{AO} \cdot \overline{BL}$

Der Winkel $\sphericalangle BOL$ ist ein Außenwinkel des Dreiecks ABO und damit:
 $\sphericalangle BOL = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Weiter ist $\sphericalangle LBO = \frac{\beta}{2} + \sphericalangle LBC = \frac{\beta}{2} + \sphericalangle LAC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, denn die Winkel $\sphericalangle LBC$ und $\sphericalangle LAC$ sind Umfangswinkel über der Strecke LC . Damit ist das Dreieck OBL

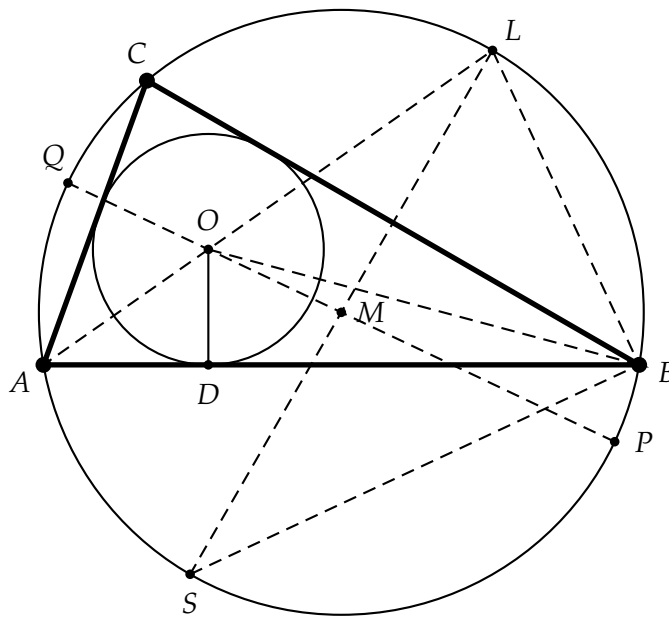


ABB. 8 Zum Satz von Euler

gleichschenkelig, somit $LO = BL$. Damit folgt: $2r\rho = \overline{AO} \cdot \overline{LO}$.

Mit dem Sehensatz folgt nun $\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = \overline{AO} \cdot \overline{OL} = 2r\rho$. Setzt man $d = \overline{MO}$, dann geht das über in $(r + d)(r - d) = 2r\rho$, also $d^2 = r^2 - 2r\rho$. Damit hat man den

Satz 2.3 (Satz von Euler) *Der Abstand d von Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt ist gegeben durch $d^2 = r(r - 2\rho)$, wo r der Umkreisradius und ρ der Inkreisradius ist.*

2.3. Sätze von Menelaos und Ceva

Satz 2.4 (Satz von Menelaos (ca 100 n.Chr, Alexandria))

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen, so sind die beiden Produkte aus je drei nicht zusammenstoßenden Seitenabschnitten einander gleich.

Mit den Bezeichnungen von Abb. 9 links gilt also

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1 \quad (7)$$

Zum Beweis wenden wir dreimal den zweiten Strahlensatz mit den Zentren P , E und F , dann ergibt sich mit den Loten ℓ , m und n

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n} \quad \frac{EB}{EC} = \frac{n}{\ell} \quad \frac{FC}{FA} = \frac{\ell}{m}$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen, so hat man die Behauptung.

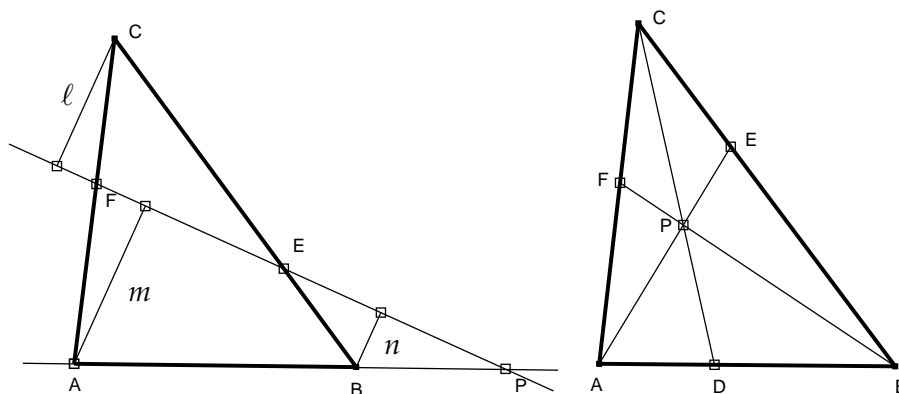


ABB. 9 Zu den Sätzen von Menelaos (links) und Ceva (rechts)

Satz 2.5 (Satz von Ceva (um 1700, Italien))

Schneiden sich drei von je einer Ecke ausgehenden Transversalen in einem Punkt P , so sind die beiden Produkte aus je drei nicht zusammenstoßenden Seitenabschnitten einander gleich.

Mit den Bezeichnungen von Abb. 9 rechts gilt also:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{DA}{DB} = 1$$

Zum Beweis wenden wir zunächst den Satz von Menelaos auf das Teildreieck ADC mit der Transversale FP an; anschließend auf das Teildreieck DBC mit Transversale PE . Dann ergibt sich

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1 \quad \frac{AB}{AD} \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{PD}{PC} = 1$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, so entsteht die Behauptung.

Auch die *Umkehrung des Satzes von Ceva* ist richtig. Gelten die Verhältnisse des Satzes, dann schneiden sich die Geraden AE , BF und CD in einem Punkt.

2.4. Harmonische Teilung und Kreis des Apollonius

2.4.1. Harmonische Teilung

Eine Strecke AB wird durch die Punkte T_i (zwischen A und B) und T_a (außerhalb von AB) harmonisch geteilt, wenn gilt:

$$p : q = AT_i : BT_i = AT_a : BT_a \quad (8)$$

Konstruktiv erfolgt dies mittels des zweiten Strahlensatzes wie in folgender Abb. 10:

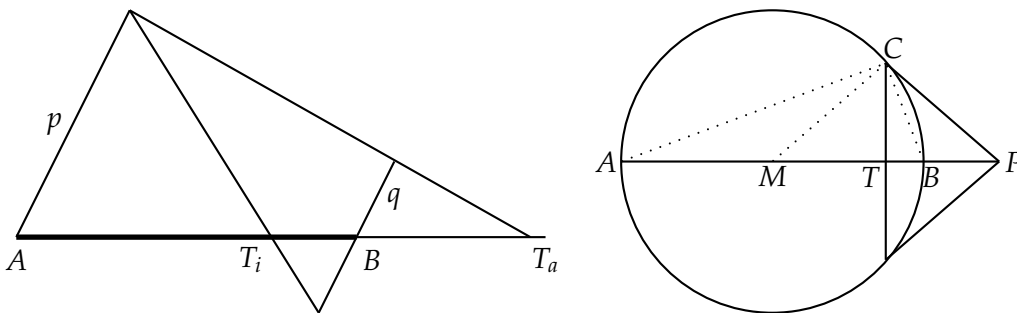


ABB. 10 Harmonische Teilung der Strecke AB im Verhältnis $p : q$

Wie man sofort erkennt, ist das »harmonische« an dieser Teilung, dass nun die Strecke T_iT_a von den Punkten A und B ebenfalls harmonisch geteilt wird, denn durch einfaches Umstellen von Gleichung (8) folgt sofort, dass $T_iA : T_aA = T_iB : T_aB$ gilt, also wieder eine harmonische Teilung vorliegt.

Wählt man $oBdA$ für die Streckenlänge $AB = 1$, dann ist ersichtlich:

$$AT_i = \frac{p}{p+q} \quad BT_i = \frac{q}{p+q} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} = \frac{AT_a}{BT_a} = \frac{AB + BT_a}{BT_a} = \frac{1}{BT_a} + 1$$

woraus folgt

$$BT_a = \frac{q}{p-q} \Rightarrow AT_a = 1 + BT_a = \frac{p}{p-q} \Rightarrow \frac{AT_i}{AT_a} = \frac{p-q}{p+q}$$

Daraus folgt: Teilen die Punkte T_i und T_a die Strecke AB harmonisch im Verhältnis $p : q$, dann wird die Strecke T_iT_a von A und B im Verhältnis $(p - q) : (p + q)$ harmonisch geteilt.

Deshalb nennt man die vier Punkte A, B, T_i und T_a vier harmonische Punkte.

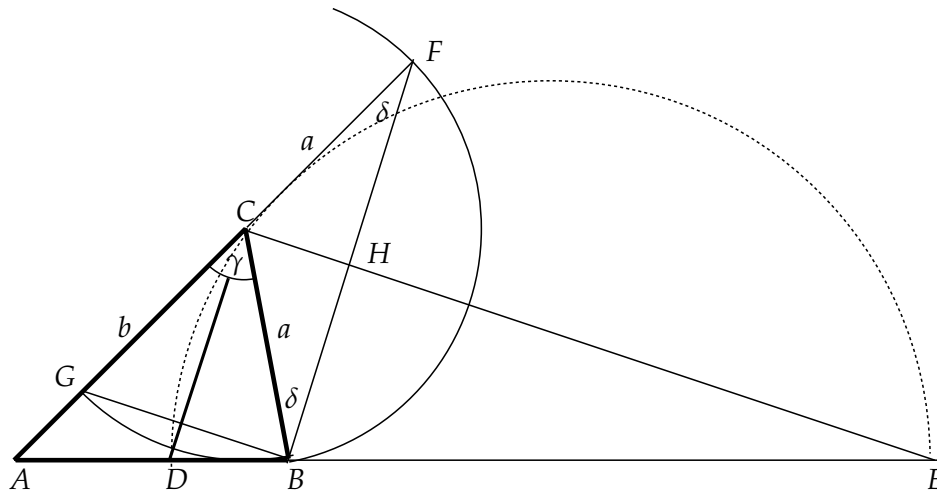


ABB. 11 Harmonische Punkte bei Winkelhalbierenden und Kreis des Apollonius

2.4.2. Harmonische Punkte am Kreis

In der Abbildung 10 rechts wurden vom Punkt P aus die beiden Tangenten an den Kreis mit Radius r gezeichnet. Bezeichnen wir die Strecke MT mit q , dann ist $AT = r + q$ und nach dem Kathetensatz in MPC noch $MP = r^2/q$, also $AP = r + r^2/q$ und weiter $BT = r - q$ und $BP = r^2/q - r$. Damit können wir nun zeigen:

Satz 2.6 Die Punkte A, B, T und P bilden vier harmonische Punkte.

Denn nun ist zu zeigen: $AT : BT = AP : BP$ d. h. $AT \cdot BP = AP \cdot BT$.

Das erste Produkt ist $(r + q)(r^2/q - r) = r^3/q - r^2 + r^2 - qr = r^3/q - qr$

das zweite $(r + r^2/q)(r - q) = r^2 - rq + r^3/q - r^2 = r^3/q - rq$, also dasselbe.

2.4.3. Harmonische Punkte der Winkelhalbierenden

Wir betrachten die Abb. 11. Dort ist das Dreieck ABC mit der Winkelhalbierenden von γ und der Halbierenden des Nebenwinkels von γ (Strecke CE) gezeichnet. Man erkennt, dass im gleichschenkligen Dreieck CBF der Winkel $\delta = \frac{1}{2}\gamma$ sein muss, denn $\sphericalangle(BCF)$ ist ja $180^\circ - \gamma$. Damit ist $CD \parallel BF$ und man erhält mit dem Strahlensatz (Zentrum bei A):

$$AD : DB = b : a$$

Ebenso ist das Dreieck GBC gleichschenklige und die Seite BG parallel zu CE , weil beide auf CD senkrecht stehen müssen. Da nach Konstruktion $CG = a$ ist folgt wieder nach dem ersten Strahlensatz:

$$AE : BE = b : a$$

Damit haben wir:

Satz 2.7 Die Winkelhalbierende und die Halbierende des Nebenwinkels im Dreieck teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten. Die Punkte A , B , D und E bilden vier harmonische Punkte.

Da nun aber der Winkel DCE ein Rechter ist, liegt der Punkt C auf dem Thaleskreis über der Strecke DE (in Abb. 11 gepunktet gezeichnet). Dieser Kreis wird Kreis des APOLLONIUS genannt und ist eine wichtige Ortslinie

Satz 2.8 (Kreis des Apollonius) Alle Punkte P , die von zwei festen Punkten A und B dasselbe Abstandsverhältnis haben, liegen auf dem APOLLONIUSschen Kreis.

Alle Punkte P von denen aus zwei auf einer Geraden zusammenstoßende Strecken AD und DB unter demselben Sehwinkel erscheinen, liegen auf dem APOLLONIUSschen Kreis.

2.4.4. Weitere Beziehungen

Satz 2.9 Die Winkelhalbierende wird durch den Inkreismittelpunkt und den Ankreismittelpunkt harmonisch geteilt.

Auf jeder Dreiecksseite wird die Strecke zwischen Höhenfußpunkt und Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch die Berührungspunkte von Inkreis und Ankreis harmonisch geteilt

Im Teil-Dreieck AW_cC teilen die Winkelhalbierenden w_α und $w_{\alpha'}$ (Winkelhalbierende des Nebenwinkels) die Seite w_γ harmonisch in O und O_c .

Die zweite Aussage folgt durch senkrechte Projektion von COW_cO_c auf die Strecke c aus dem ersten Strahlensatz mit W_c als Zentrum.

Satz 2.10 Spiegelt man ein Dreieck an einer Winkelhalbierenden (z. B. w_γ), so schneiden sich c und c' in W_c unter dem Winkel $|\alpha - \beta|$ und bilden die beiden inneren Tangenten des Inkreises und des zugehörigen Ankreises.

Der Schnitt von c und c' in W_c ist klar, da W_c ein Fixpunkt der Spiegelung ist. Dann ist ja z. B. β der Außenwinkel von AW_cB' , also Summe der nicht anliegenden Innenwinkel, daher ist der Schnittwinkel von c und c' gerade $\beta - \alpha$. Bei der Spiegelung bleiben ja die Kreise unverändert, und da c beide Kreise berührt, tut das c' dann auch.

2.4.5. Das harmonische Mittel

Fährt man eine Strecke s mit der Geschwindigkeit v dann dieselbe Strecke mit der Geschwindigkeit u , dann ist die Zeit $t = s/v + s/u$. Daraus folgt für die Durchschnittsgeschwindigkeit $w = 2s/t$ bzw.

$$\frac{1}{w} = \frac{t}{2s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \Rightarrow w = \frac{2uv}{u+v}$$

Diesen Mittelwert bezeichnet man als *harmonisches Mittel*. Der Name stammt aus der Musik. Er hat auch (erwartungsgemäß) mit der harmonischen Teilung zu tun:

2 Beziehungen am Dreieck

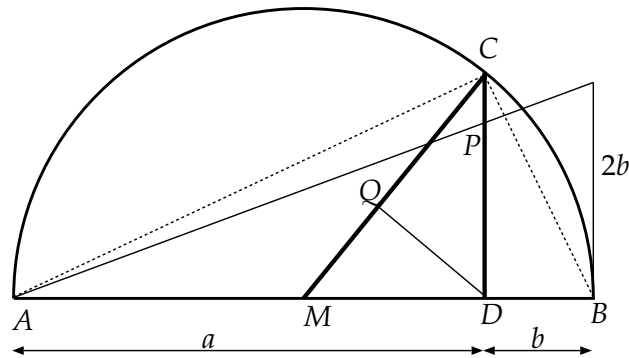


ABB. 12 Konstruktion von arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel

Satz 2.11 (harmonisches Mittel) Sind A, B, T_i und T_a vier harmonische Punkte, dann ist $T_i T_a$ das harmonische Mittel der Strecken AT_a und BT_a .

Denn es ist ja nun mit $AB = 1$ und den Überlegungen von Abschnitt 2.4.1:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{AT_a} + \frac{1}{BT_a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p-q}{p} + \frac{p-q}{q} \right) = \frac{p^2 - q^2}{2pq}$$

und

$$T_i T_a = AT_a - AT_i = \frac{p}{p-q} - \frac{p}{p+q} = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$$

was zu zeigen war.

In der Optik trifft man in Gestalt der Linsegleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ auch auf ein harmonisches Mittel. Setzt man nämlich $2f = r$, so wird das harmonische Mittel von Gegenstands- und Bildweite gerade gleich dem Krümmungsradius r (des Hohlspiegels).

In Abbildung 12 ist die Konstruktion der drei Mittelwerte

$$m = \frac{1}{2}(a+b) \quad g = \sqrt{ab} \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

gezeigt. Das arithmetische Mittel m ist hier durch die Strecke MC , das geometrische Mittel g nach dem Höhensatz durch die Strecke DC und das harmonische Mittel $h = DP$ mittels der Gleichheit:

$$h : a = 2b : (a+b)$$

aus dem zweiten Strahlensatz konstruiert. Man erkennt sofort die Gültigkeit der Beziehung

$$h \leq g \leq m$$

Gleichheit tritt nur für $a = b$ auf. Auch die Strecke CQ stellt das harmonische Mittel dar, denn aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke MDC und QDC folgt $QC : g = g : m$.

2.5. Euler-Gerade und Feuerbach-Kreis

Satz 2.12 (Euler-Gerade) *In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Gerade (EULER-Gerade). Dabei gilt $HS = 2 \cdot SM$.*

Satz 2.13 (Feuerbach-Kreis) *In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (FEUERBACH-Kreis).*

Der Radius dieses Kreises ist gleich dem halben Umkreisradius, sein Mittelpunkt F liegt auf der EULER-Geraden, halbiert die Strecke MH und bildet mit H , S und M vier harmonische Punkte.

Dieser Kreis berührt die drei Ankreise und den Inkreis.

2.5.1. Beweis der Euler-Gerade

Das von den Seitenmitten M_a , M_b und M_c gebildete Dreieck hat zu den Seiten des Ausgangsdreiecks ABC parallele Seiten halber Länge. Daher geht es aus dem Ausgangsdreieck durch eine zentrische Streckung mit Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ hervor. Da beide Dreiecke dieselben Seitenhalbierenden haben, ist der Schwerpunkt S beiden Dreiecken gemeinsam und somit das Streckzentrum.

Bei dieser Streckung gehen die Höhen von ABC in die Höhen des Mittendreiecks über. Da aber die Höhen des Mittendreiecks gerade die Mittelsenkrechten des Ausgangsdreiecks sind, geht bei dieser Streckung H in M über und es ist $SM = \frac{1}{2}SH$. Damit sind die Aussagen des Satzes über die EULER-Gerade bewiesen.

2.5.2. Beweis zum Feuerbach-Kreis

Der FEUERBACH-Kreis soll ja der Umkreis des Seitenmittendreiecks $M_aM_bM_c$ (M-Dreieck) sein. Wir müssen also zeigen, dass auch alle anderen geforderten Punkte auf diesem Kreis (F-Kreis) liegen und dass sein Mittelpunkt F die geforderten Eigenschaften hat.

- I. Die zentrische Streckung an S mit $k = -\frac{1}{2}$ führt den Umkreis von ABC in den F-Kreis über, also insbesondere M nach F . Damit liegt F auf SM also auf der EULER-Gerade. Damit ist auch

$$FS = \frac{1}{2}SM = \frac{1}{4}HS \quad \Rightarrow \quad MS : MH = 1 : 3 = FS : FH$$

Damit bilden S , H , M und F vier harmonische Punkte.

- II. Die zentrische Streckung von H aus mit $k = +\frac{1}{2}$ führt ABC in $H_aH_bH_c$ (H-Dreieck) über. Das H-Dreieck ist gleichsinnig kongruent zum M-Dreieck, weil beide aus dem Ausgangsdreieck durch zentrische Streckung mit $\pm\frac{1}{2}$

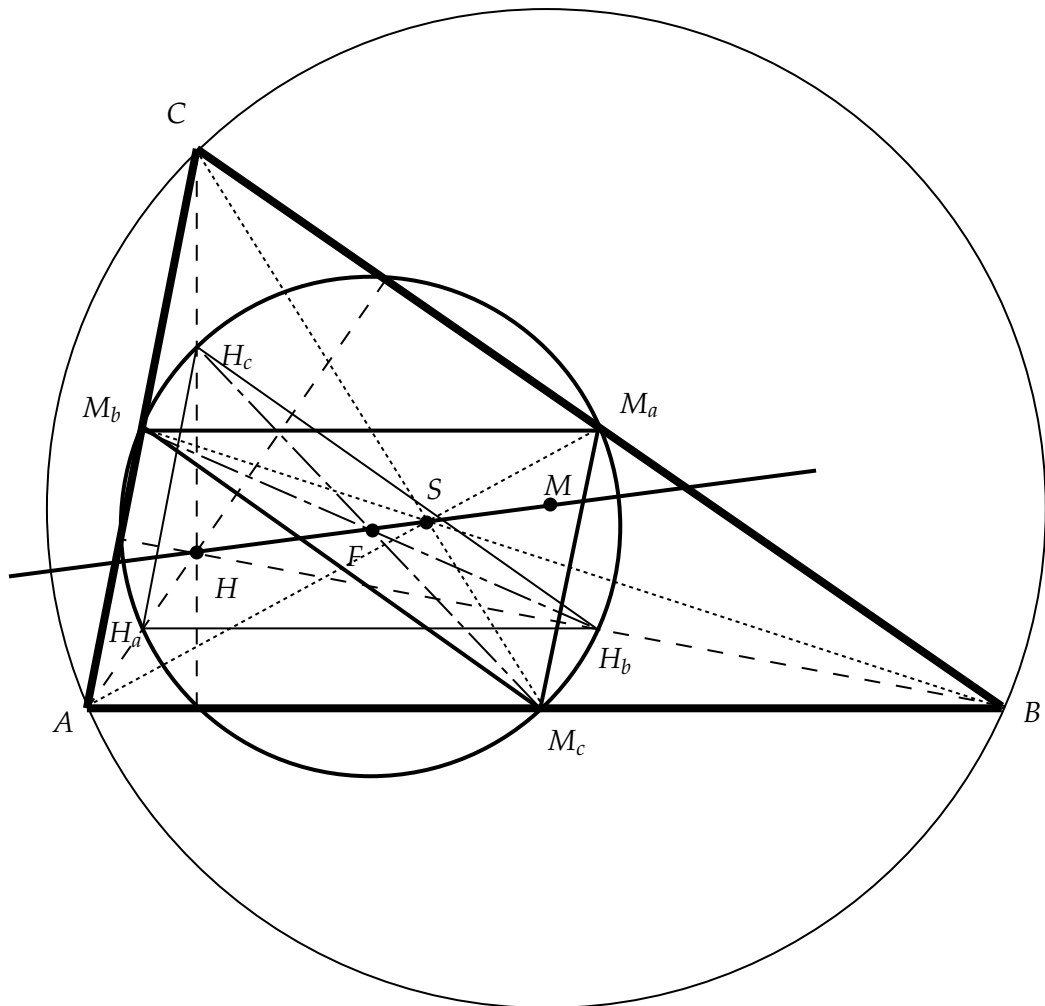


ABB. 13 Feuerbach-Kreis und Euler-Gerade. Die Höhen sind gestrichelt, die Seitenhalbierenden gepunktet eingezeichnet. Das Mittendreieck ist stärker, das Dreieck der Mitten der oberen Höhenabschnitte »normal« gezeichnet.

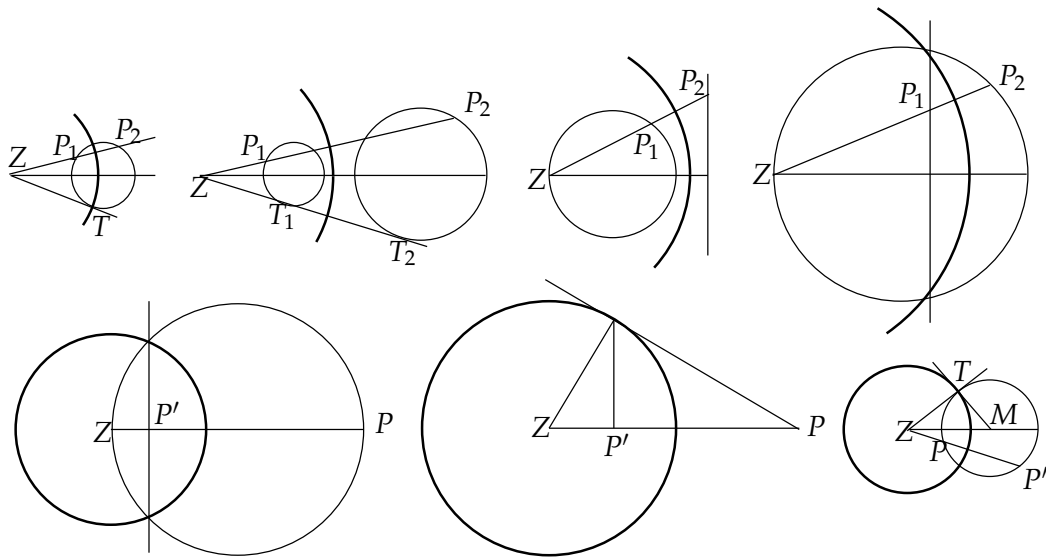


ABB. 14 Inversion am Kreis. Die Bilder der oberen Reihe sind dieselben wie bei den Sehnen-Tangentensätzen, nur ist immer ein Punktepaar weggelassen. Von links nach rechts hat man Sekantensatz an einem Kreis, an zwei Kreisen und an Kreis und Gerade. In der unteren Reihe hat man die Konstruktion für die Inversion am Kreis. Der Inversionskreis(bogen) ist jeweils dick gezeichnet.

hervorgegangen sind; sie lassen sich also durch eine Punktspiegelung ineinander überführen. Da sich H und M entsprechen, muss der Mittelpunkt von HM das Zentrum dieser Punktspiegelung sein, das ist aber nach (I.) der Punkt F , weil $FM = FH = 3FS$ gilt. Die Umkreise beider Dreiecke sind identisch, weil sie durch Punktspiegelung am gemeinsamen Mittelpunkt F auseinander hervorgehen. Nebenbei erkennt man, dass die Eckenpaare M_aH_a , M_bH_b und M_cH_c jeweils Durchmesser des F -Kreises sind.

- III. Die drei Höhenfußpunkte sind Scheitel rechter Winkel über den obigen Durchmessern müssen also (Thaleskreis!) auf dem F -Kreis liegen.
- IV. Um zu beweisen, dass der F -Kreis den Inkreis und die Ankreise berührt, brauchen wir noch etwas Theorie, deshalb folgt er später (vgl. Abschnitt 3.2).

3. Inversion am Kreis

3.1. Definition und Eigenschaften der Inversion

Wir betrachten nochmals die Sehnen-Sekantensätze von Abbildung 2 und Abbildung 4.

In Abbildung 14 sind diese nochmals abgebildet. Dabei wurde im Gegensatz

zu den »Originalen« ein Punktepaar weggelassen. In allen Bildern oben gilt

$$ZP_1 \cdot ZP_2 = \text{const} \equiv r^2 = \begin{cases} ZT^2 \\ ZT_1 \cdot ZT_2 \end{cases} \quad (9)$$

Mittels dieser Gleichung kann der Zusammenhang zwischen P_1 und P_2 als eine Abbildung betrachtet werden, die den Punkt P in den Punkt P' überführt. Evident führt sie dann auch P' wieder nach P zurück. Diese Abbildung heißt *Inversion am Kreis*.

Sie ist bestimmt durch den Inversionskreis mit Mittelpunkt Z und Radius r . Jeder Punkt P verlagert sich auf seinem Zentrumsstrahl PZ so, dass $P'Z \cdot PZ = r^2$ wird, wobei gefordert wird, dass sich P und P' auf derselben Seite von Z befinden (das bezeichnet man als hyperbolische Inversion, würde man verschiedene Seiten fordern, so hätte man elliptische Inversion). Der Punkt Z selbst hat keinen Bildpunkt im Endlichen, sein Bildpunkt ist der »unendlich ferne« Punkt.

Die Inversion bildet das Innere des Inversionskreises auf sein Äußeres ab und umgekehrt, weshalb man auch von der *Spiegelung am Kreis* spricht.

Satz 3.1 *Inverse Punkte teilen den Inversionskreisdurchmesser harmonisch.*

Das folgt direkt aus der Abbildungsvorschrift und Satz 2.6.

Satz 3.2 (Eigenschaften der Inversion am Kreis)

- I. *Alle Geraden, die nicht durch Z gehen, werden in Kreise durch Z abgebildet und umgekehrt: Alle Kreise durch Z gehen in Geraden über.*
- II. *Alle Kreise, die nicht durch Z gehen werden auf Kreise abgebildet. Orthogonalkreise (das sind solche, die den Inversionskreis rechtwinklig schneiden), gehen in sich selbst über.*
- III. *Die Abbildung ist winkeltreu.*
- IV. *Berühreigenschaften bleiben erhalten.*
- V. *Fixpunktkreis ist der Inversionskreis.*
- VI. *Fixgeraden sind alle Geraden durch Z .*
- VII. *Fixkreise sind alle Orthogonalkreise.*

Die meisten dieser Eigenschaften sind offensichtlich. (V) und (VI) folgen direkt aus der Definition. (VII) folgt aus der Abbildung 14 unten rechts. Hier ist ja $ZT = r$ und damit liegen P und P' nach dem Sehnen-Tangentensatz auf demselben Kreis. Damit folgen nun (I) und (II) aus den Abbildungen 14 der oberen Reihe.

Zum Nachweis der Winkeltreue (III) betrachte man die Abbildung 15. Hier schließen zwei Geraden im Punkt P den Winkel α ein. Die Bilder der Geraden

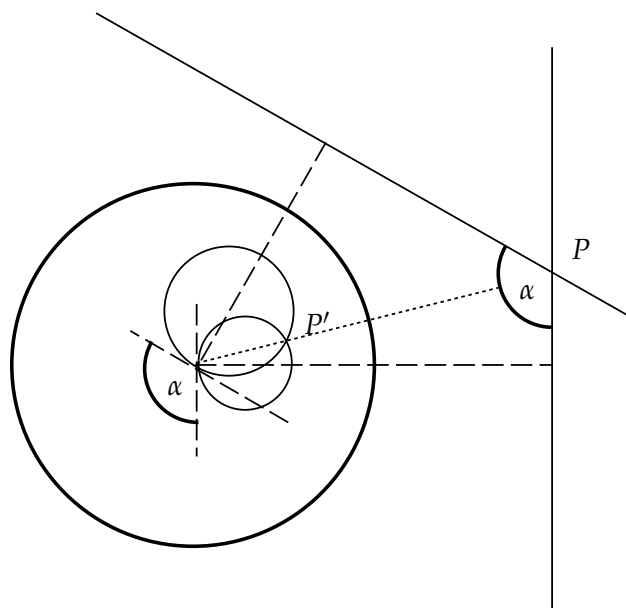


ABB. 15 Nachweis der Winkeltreue bei der Inversion

sind Kreise durch Z , deren Durchmesser mit den Loten auf die Geraden zusammenfallen. Daraus folgt sofort, dass sich die Kreise in Z ebenfalls unter dem Winkel α schneiden. Aber die Schnittwinkel zweier Kreise sind in ihren *beiden* Schnittpunkten gleich, also schneiden sich die Kreise auch im Punkt P' unter dem Winkel α .

Es bleibt noch die Eigenschaft (IV) der »Berührtreue« nachzuweisen. Zunächst ist ja die Inversion eine eindeutige Abbildung, also bleiben gemeinsame Punkte zweier Linien nach der Abbildung wieder gemeinsame Punkte. Liegen andererseits zwei Punkte auf derselben Seite einer Kurve, dann tun das auch ihre Bilder. Damit kann ein Berührungspunkt nicht auf einen »echten« Schnittpunkt abgebildet werden.

ANMERKUNG

Die Bedeutung der Inversion liegt in der Tatsache, dass sie im Gegensatz zu den »üblichen« geometrischen Abbildungen, wie Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Projektion usw. eben nicht geradentreu ist. Dadurch lassen sich komplizierte Kreisprobleme auf Geradenprobleme transformieren.

3.2. Beweis der Berühreigenschaften des Feuerbachkreises

Nun soll der Beweis nachgeliefert werden, dass der FEUERBACH-Kreis den Inkreis und die drei Ankreise berührt. Dazu benützen wir unsere neu gefundenen Erkenntnisse über die Inversion. Es genügt zu zeigen, dass der FEUERBACH-Kreis f den Inkreis k_i und einen der Ankreise z. B. k_c berührt. Dazu bilden wir den

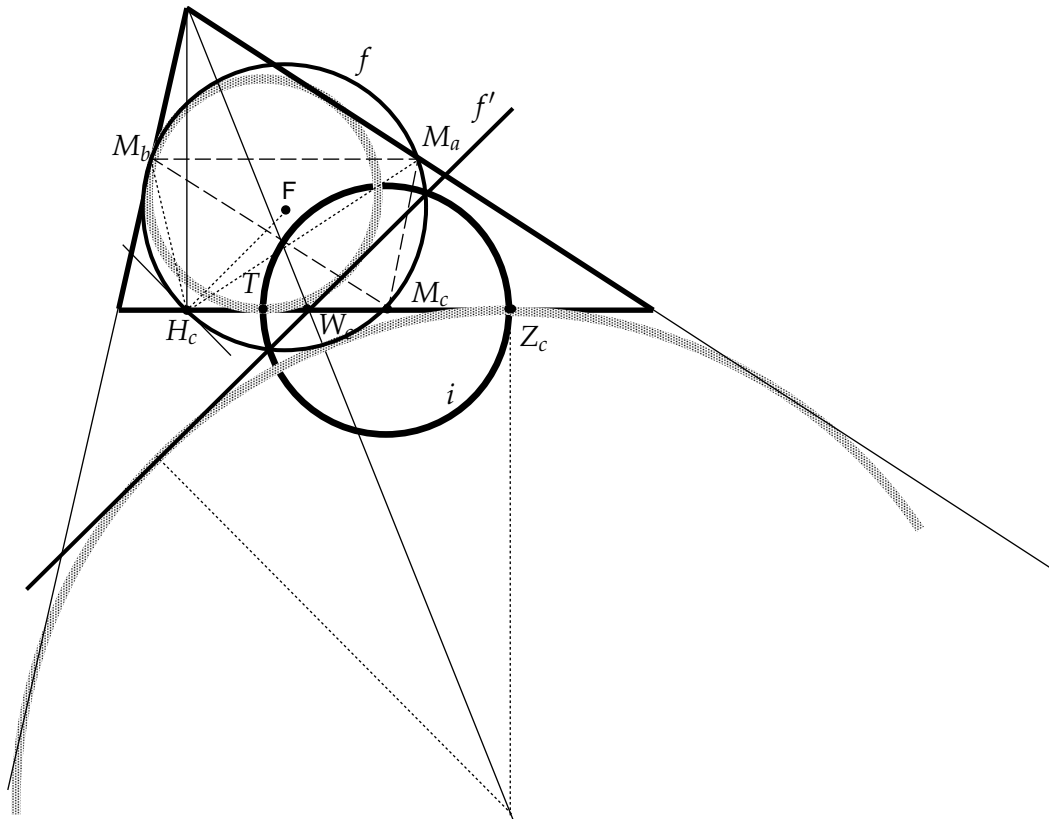


ABB. 16 Beweis der Berührungseigenschaften des Feuerbach-Kreises. Die »schattierten« Kreise sind Inkreis und Ankreis, W_c ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

FEUERBACH-Kreis in die Gerade f' ab und zeigen, dass f' Tangente an k_i und k_c ist.

Wir betrachten dazu die Abbildung 16. Nach Gleichung (3) liegen ja die Punkte T und Z_c symmetrisch zum Seitenmittelpunkt M_c . Wir nehmen nun den Kreis um M_c durch diese beiden Punkte als Inversionskreis i . Bei der Inversion an diesem Kreis gehen ineinander über:

- Die Seite c als Zentrumsgerade in sich selbst.
- Der Inkreis und der Ankreis sind jeweils Orthogonalkreise, weil sie sich mit dem Inversionskreis in T bzw. Z_c rechtwinklig schneiden; damit gehen sie in sich selbst über.
- Der Höhenfußpunkt H_c geht in W_c über, weil gemäß Satz 2.9 die Punkte H_c , T , W_c und Z_c vier harmonische Punkte sind, was nach Satz 3.1 die Eigenschaft der Inversion ist.
- Der FEUERBACH-Kreis f geht durch das Zentrum M_c , wird also auf eine Gerade abgebildet, die durch das Bild W_c von H_c gehen muss.

3.2 Beweis der Berühreigenschaften des Feuerbachkreises

- Der Schnittwinkel zwischen f und c in H_c ist nach Satz 1.3 (III) gerade $\alpha - \beta$ (dazu betrachte man f als Umkreis von $H_cM_aM_b$) und wird wegen der Winkeltreue in einen gleichgroßen Winkel zwischen $c = c'$ und f' in W_c abgebildet.

Daraus folgt nach Satz 2.10, dass f' die gemeinsame Tangente an den Inkreis und den Ankreis ist. Damit berührt nun auch f den Inkreis und den Ankreis.