

# Abriss der Geometrischen Optik

Rudolf Lehn      Peter Breinfeld\*

Störck-Gymnasium  
Bad Saulgau

27. Februar 2010

## Inhaltsverzeichnis

### *I Reflexionsprobleme • 3*

#### *1 Reflexion des Lichts • 3*

#### *2 Bilder am ebenen Spiegel • 3*

#### *3 Gekrümmte Spiegel • 3*

##### *3.1 Hohlspiegel • 4*

##### *3.2 Abbildungsgleichung • 4*

##### *3.3 Newtonsche Hohlspiegelgleichung • 5*

##### *3.4 Bildkonstruktionen am Hohlspiegel • 5*

##### *3.5 Wölbspiegel (Konvexspiegel) • 6*

### *II Brechung • 8*

#### *4 Brechungsgesetz von Snellius • 8*

##### *4.1 Brechung am Prisma • 8*

##### *4.2 Brechung des Lichts an einer Kugelfläche • 9*

#### *5 Abbildung durch Linsen • 10*

##### *5.1 Newtonsche Form der Linsengleichung • 12*

##### *5.2 Brechkraft von Linsen • 12*

##### *5.3 Abbildung durch ein Linsensystem • 12*

\* E-Mail: [phbrf@t-online.de](mailto:phbrf@t-online.de)      <http://www.pBreitfeld.de>

## *Inhaltsverzeichnis*

- 6 *Optische Instrumente* • 13
  - 6.1 Allgemeine Bedeutung optischer Instrumente • 13
  - 6.2 Vergrößerungszahl  $v$  eines Instruments • 14
  - 6.3 Lupe • 14
  - 6.4 Mikroskop • 14
  - 6.5 Fernrohre • 16
    - 6.5.1 Galileisches Fernrohr oder Holländisches Fernrohr • 16
    - 6.5.2 Astronomisches oder Keplersches Fernrohr • 17

## Teil I

# Reflexionsprobleme

## 1. Reflexion des Lichts

- Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in **einer** Ebene.
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich groß. ( $\alpha = \beta$ )

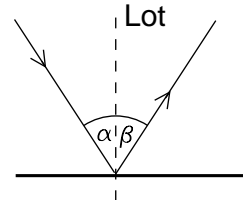


ABB. 1 Reflexion des Lichts

## 2. Bilder am ebenen Spiegel

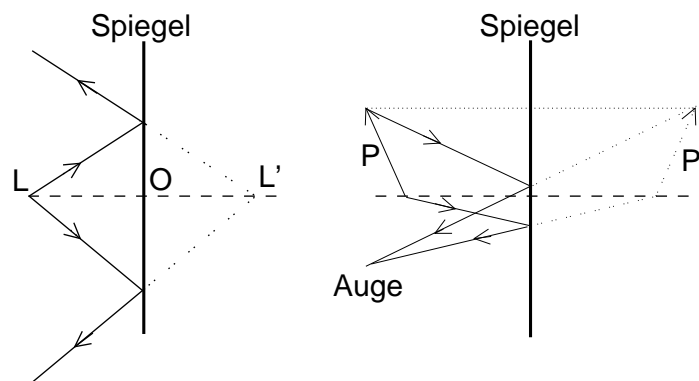


ABB. 2 Bild am ebenen Spiegel

### ANWENDUNGEN

Mehrfachspiegelungen: Winkelspiegel, Spiegelsextant, Zentralspiegel = Rückstrahler.

## 3. Gekrümmte Spiegel

Jedes kleine Flächenelement einer gekrümmten Spiegelfläche kann als ebener Spiegel betrachtet werden. Bei ihm gilt jeweils das Reflexionsgesetz. Man unterscheidet Hohlspiegel (=Konkavspiegel) und Wölbspiegel (=Konvexspiegel).

### 3 Gekrümmte Spiegel

#### 3.1. Hohlspiegel

S: Scheitelpunkt; MS: Hauptachse

$$\overline{MF} = \overline{FA} = \frac{\overline{MA}}{2 \cdot \cos \beta} = \frac{r}{2 \cdot \cos \beta}$$

Bei paraxialen Strahlen, d.h. Strahlen die nahe der optischen Achse verlaufen, ist  $\cos \beta \approx 1$ . Somit ist  $\overline{FS} = f = \frac{r}{2}$

Damit schneiden sich alle zur optischen Achse parallelen Paraxialstrahlen im Brennpunkt F.

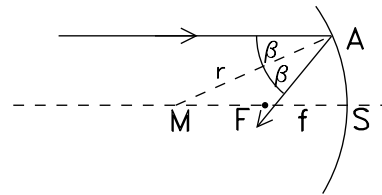


ABB. 3 Strahlenverlauf am Hohlspiegel

#### 3.2. Abbildungsgleichung

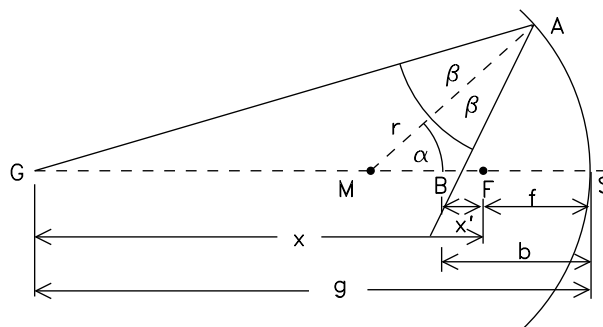


ABB. 4 Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel

Sinussatz: (vgl. Abb. 4)

$$\begin{aligned} \Delta GAM : \frac{\overline{GM}}{\sin \beta} &= \frac{\overline{GA}}{\sin \alpha} \\ \Delta MBA : \frac{\overline{MB}}{\sin \beta} &= \frac{\overline{BA}}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{GM}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BA}}$$

Für paraxiale Strahlen gilt:

$$\begin{aligned} \overline{GM} &= g - r; \quad \overline{GA} \approx g; \quad \overline{MB} \approx r - b \\ \Rightarrow \frac{g - r}{g} &= \frac{r - b}{b} \Leftrightarrow 1 - \frac{r}{g} = \frac{r}{b} - 1 \Rightarrow 2 = \frac{r}{g} + \frac{r}{b} \\ \Rightarrow \frac{2}{r} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \stackrel{f=r/2}{\Rightarrow} \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}} \end{aligned} \quad (1)$$

## Bezeichnungen

g: Gegenstandsweite; b: Bildweite;  
f: Brennweite; r: Krümmungsradius des Spiegels

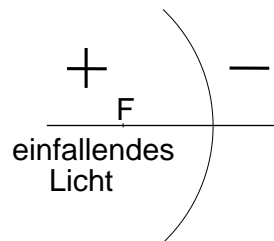


ABB. 5 Vorzeichenregel beim Hohlspiegel

Bei optischen Abbildungen ist es hilfreich, klare Vorzeichenregeln zu vereinbaren. Beim Hohlspiegel (vgl. Abb. 5) werden alle Größen, die auf der Seite des einfallenden Lichtes liegen, positiv gerechnet. Alle Größen, die auf der anderen Seite des Hohlspiegels liegen, werden negativ gerechnet.

g, r, f sind somit bei Hohlspiegel immer **positiv**. Die Bildweite b kann positiv oder negativ sein.

## 3.3. Newtonsche Hohlspiegelgleichung

Versteht man mit  $x$  den Abstand des Gegenstandspunktes  $G$  vom Brennpunkt  $F$  und mit  $x'$  den Abstand des Bildpunktes  $B$  vom Brennpunkt  $F$ , so gilt

$$g = x + f; \quad b = x' + f \implies x \cdot x' = f^2 \quad (2)$$

## 3.4. Bildkonstruktionen am Hohlspiegel

Für paraxiale Strahlen gelten folgende einfache Regeln:

Achsenparallele Strahlen werden zu Brennstrahlen und umgekehrt. Parallele Strahlen sammeln sich im Brennpunkt oder in einem Punkt der Brennebene. Mittelpunktstrahlen, d.h. Strahlen durch den Krümmungsmittelpunkt  $M$  werden in sich selbst zurückgeworfen.

VERGRÖßERUNG:

$$v = \frac{\overline{B'B}}{\overline{G'G}} = \frac{b}{g} = \frac{f}{g-f} = \frac{b-f}{f} \quad (3)$$

$v > 0$  : umgekehrtes, reelles Bild

$v < 0$  : aufrechtes, virtuelles Bild

### 3 Gekrümmte Spiegel

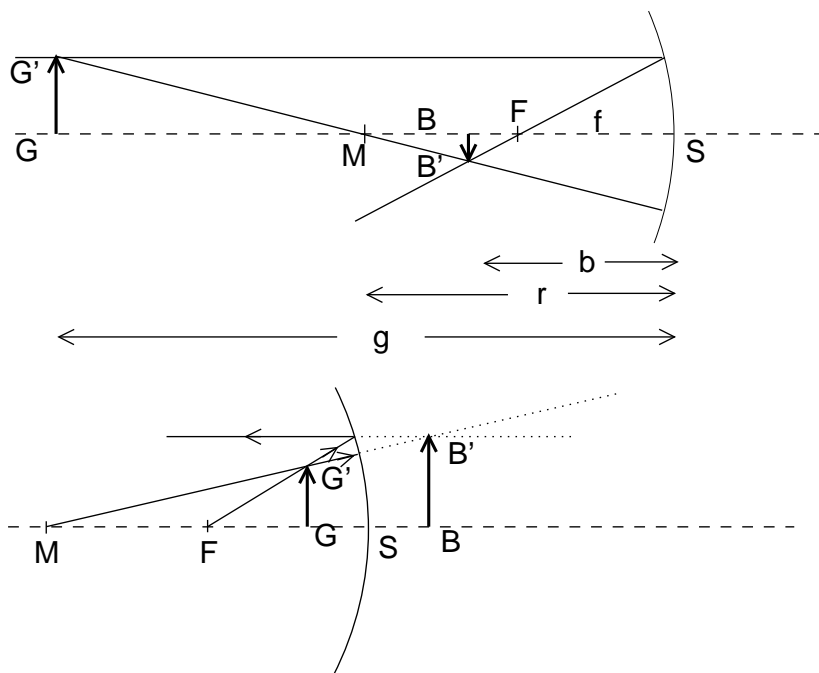


ABB. 6 Bildkonstruktionen beim Hohlspiegel

Diese Beziehung ermöglicht eine einfache Herleitung der Spiegelgleichung!

#### EXPERIMENT:

Bestimme den Krümmungsradius eines Uhrglases!

#### 3.5. Wölbspiegel (Konvexspiegel)

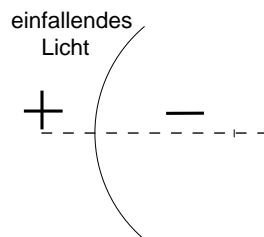


ABB. 7 Vorzeichenregel beim Wölbspiegel

Die Bezeichnungen für Scheitel, Brennpunkt usw. werden wie beim Hohlspiegel gehandhabt. vgl. Abbildung 8. Die Abbildungsgleichung lässt sich auf gleiche Weise mit Hilfe des Sinus-Satzes herleiten.

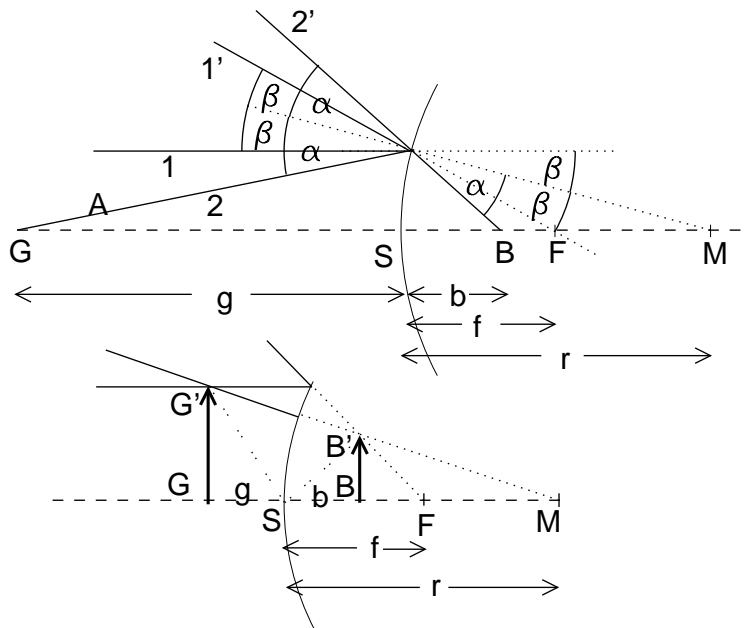


ABB. 8 Abbildungsgleichung und Bildkonstruktion beim Wölbspiegel

*Vorzeichenregel:*  $r$  und  $f$  sind beim Wölbspiegel negativ. Wird diese Vorzeichenregel beachtet, so gelten die Spiegelgleichungen auch für den Konvexspiegel!

*Aufgabe:* Bestimme mit der Abbildung 8 die Abbildungsgleichung für den Wölbspiegel.

Teil II

# Brechung

## 4. Brechungsgesetz von Snellius

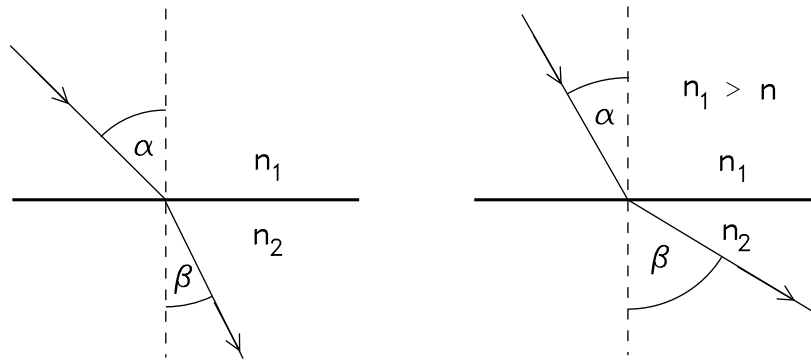


ABB. 9 Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (4)$$

$n_{12}$ : relative Brechzahl des Mediums 2 in Bezug auf das Medium 1  
 ist das Medium 1 Vakuum bzw. Luft, dann schreibt man für  $n_{12}$  nur  $n$   
 $n_1, n_2$ : absolute Brechzahlen (bzgl. Vakuum bzw. Luft)

Das Medium 1 ist optisch dichter als das Medium 2, wenn  $n_1 > n_2$ .

Das Medium 1 ist optisch dünner als das Medium 2, wenn  $n_1 < n_2$ .

Beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium wird der Lichtstrahl zum Einfallslot hin gebrochen. Beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium findet eine Brechung vom Einfallslot weg statt. Überschreitet  $\alpha$  im optisch dichteren Medium einen Grenzwinkel  $\alpha_g$ , so kommt es zur Totalreflexion.

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \implies \sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1} \quad (5)$$

### 4.1. Brechung am Prisma

$$\begin{aligned} \varepsilon: \text{brechender Winkel} \quad \varepsilon &= \beta_1 + \beta_2 \\ \delta: \text{Gesamtablenkung} \quad \delta &= \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon \end{aligned}$$

## 4.2 Brechung des Lichts an einer Kugelfläche

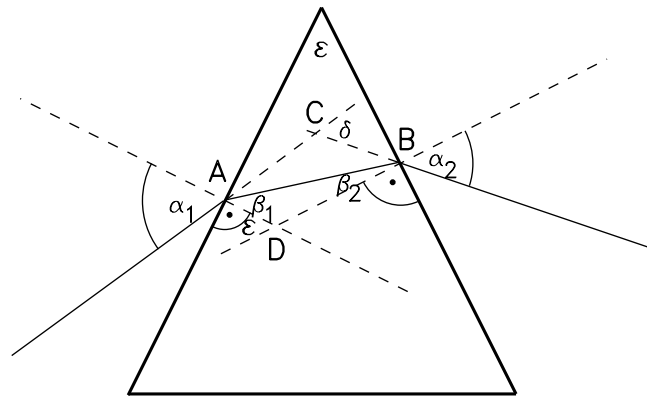


ABB. 10 Brechung am Prisma

Bei symmetrischem Durchgang ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) ist die Ablenkung  $\delta$  minimal! (Beweis vgl. Bergmann-Schaefer Band III)

$$\delta = 2 \cdot (\alpha - \beta); \quad \varepsilon = 2 \cdot \beta \Rightarrow \delta = 2\alpha - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{2}; \quad \beta = \frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \Rightarrow \frac{\sin \frac{\delta + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} = n$$

## 4.2. Brechung des Lichts an einer Kugelfläche

### VORZEICHENREGEL

Die Lichtrichtung ist von links nach rechts gerichtet.

$r > 0$  bei nach außen gewölbter Krümmung (dem einfallenden Licht entgegengerichtet, konvex)

$r < 0$  bei nach innen gewölbter Krümmung (konkav)

Die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  werden stets vom Scheitel der Kugelfläche aus gezählt, und zwar  $g$  positiv nach links und  $b$  positiv nach rechts. Nach dem Sinussatz gelten folgende Beziehungen: (vgl. Abb. 11)

$$\Delta GAM : \quad \frac{\sin \psi}{\overline{GA}} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\overline{GM}} \Leftrightarrow \frac{\sin \psi}{\overline{GA}} = \frac{\sin \alpha}{\overline{GM}}$$

$$\Delta BAM : \quad \frac{\sin \beta}{\overline{MB}} = \frac{\sin(\pi - \psi)}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\overline{MB}} = \frac{\sin \psi}{\overline{AB}}$$

$$\text{Brechungsgesetz:} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

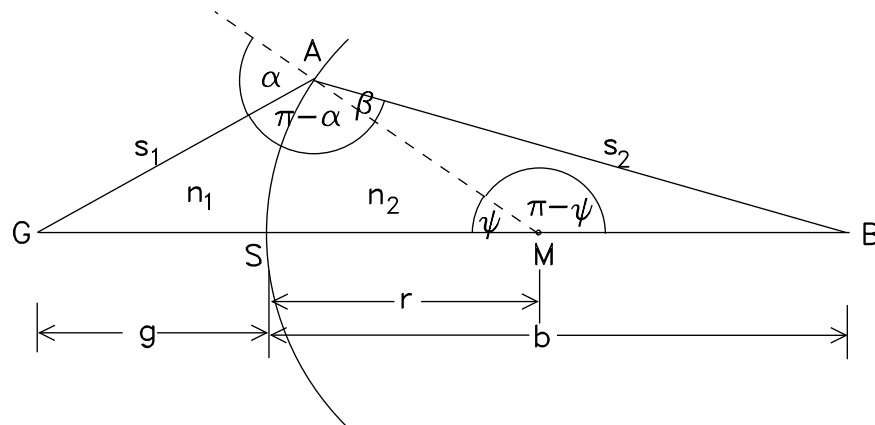


ABB. 11 Brechung an einer Kugelfläche

$$n_1 \cdot \frac{\overline{GM}}{\overline{GA}} \cdot \sin \psi = n_2 \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \cdot \sin \psi \quad (6)$$

$$n_1 \cdot \frac{g+r}{s_1} = n_2 \cdot \frac{b-r}{s_2}$$

paraxiale Strahlen  $\Rightarrow s_1 \approx g; s_2 \approx b$

$$n_1 \cdot \frac{g+r}{g} = n_2 \cdot \frac{b-r}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

## 5. Abbildung durch Linsen

Sammellinsen sind - zumindest teilweise - in der Mitte dicker als am Rand (bikonvex, plankonvex). Zerstreulinsen sind - zumindest teilweise - in der Mitte dünner als am Rand (bikonkav, plankonkav). Mit der Abbildungsgleichung an Kugelflächen kann eine Abbildungsgleichung für Linsen hergeleitet werden.

- Abbildung durch die konvexe (erste) Kugelfläche  
 $g > 0; b' > 0; r_1 > 0; n_1 = 1; n_2 = n$

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b'} = \frac{n-1}{r_1} \Rightarrow \frac{n}{b'} = \frac{n-1}{r_1} - \frac{1}{g} \quad (7)$$

- Abbildung durch die konkave (zweite) Kugelfläche  
 $-b'$  ist jetzt die neue Gegenstandsweite, da bei einer dünnen Linse, das Bild der ersten Abbildung rechts von der zweiten Kugelfläche liegt  
 $-r_2$ , wenn  $r_2 > 0$  ist.



## 5 Abbildung durch Linsen

$$\frac{n}{-b'} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{-r_2} \Rightarrow \frac{n}{b'} = \frac{1-n}{r_2} - \frac{1}{b} \quad (8)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1-n}{r_2} + \frac{1}{b} &= \frac{n-1}{r_1} - \frac{1}{g} \\ \Rightarrow \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Rightarrow (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (9)$$

Allgemein gilt

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (10)$$

Da  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \text{konstant}$  ist, kann die Konstante aus  $g = \infty$  ermittelt werden.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (11)$$

**Hinweis:** Die Formeln (9), (10) und (11) gelten auch für Zerstreuungslinsen, wenn die Vorzeichen entsprechend modifiziert werden (vgl. Vorzeichenregel).

### 5.1. Newtonsche Form der Linsengleichung

Setzt man  $g = x + f$  und  $b = x' + f$ , dann erhält man

$$x \cdot x' = f^2 \quad (12)$$

### 5.2. Brechkraft von Linsen

$D = \frac{1}{f}$  bezeichnet man als Brechkraft einer Linse.

Einheit:  $[D] = 1 \text{ Dioptrie} = 1 \text{ dptr.}$

### 5.3. Abbildung durch ein Linsensystem

LÖSUNGSWEG:

1. Bestimme die Bildweite von  $L_1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{f_1 \cdot g}{g - f_1}$$

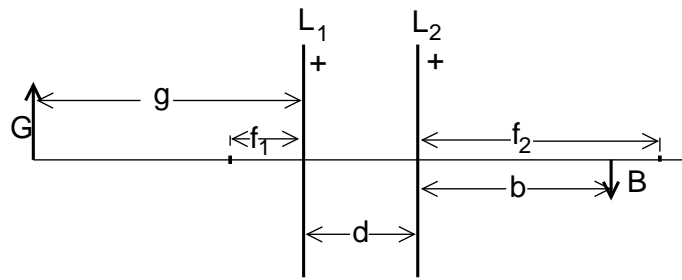


ABB. 14 System dünner Linsen

2.  $b_1 < d \Rightarrow g_2 = d - b_1$

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{d - b_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$$

$$b = \frac{f_2 \cdot d - \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot g}{g - f_1}}{d - f_2 - \frac{f_1 \cdot g}{g - f_1}} \quad (13)$$

mit  $d \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (14)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (15)$$

3.  $b_1 > d \Rightarrow g_2 = -(b_1 - d) = d - b_1$   
 Weitere Rechnung wie oben!

Die Gleichung (16) gilt auch, wenn man eine Linse etwa durch einen Hohlspiegel ersetzt.

## 6. Optische Instrumente

### 6.1. Allgemeine Bedeutung optischer Instrumente

Ihre Aufgabe ist es, von den zu fernen oder zu kleinen Gegenständen deutliche Bilder in der deutlichen Sehweite und ausreichend großem Sehwinkel zu erzeugen.

Der Sehwinkel, ist jener Winkel, unter dem ein Gegenstand vom Auge gesehen wird.

Deutliche Sehweite  $s = 25 \text{ cm}$ .

## 6 Optische Instrumente

### 6.2. Vergrößerungszahl $v$ eines Instruments

$$\begin{aligned} \psi &= \text{Sehwinkel mit Instrument} \\ \varphi &= \text{Sehwinkel ohne Instrument} \end{aligned} \quad v = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi} \quad (17)$$

### 6.3. Lupe

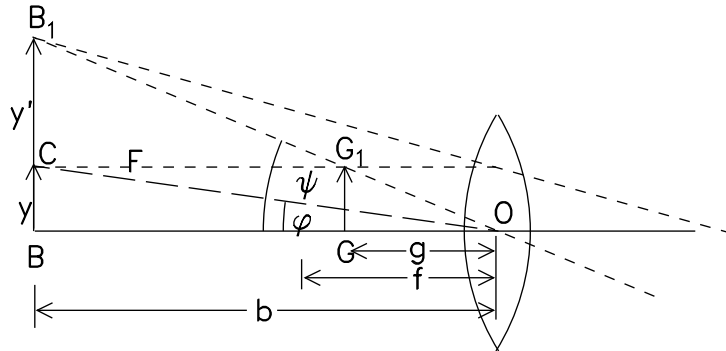


ABB. 15 Lupe

Der Gegenstand liegt innerhalb der einfachen Brennweite. Es entsteht ein aufrechtes, virtuelles Bild.

#### Vergrößerungszahl

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\overline{BB_1}}{|b|}; \quad \tan \varphi = \frac{\overline{BC}}{|b|} \\ v &= \frac{\tan \psi}{\tan \varphi} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{GG_1}} = \frac{|b|}{g} \end{aligned} \quad (18)$$

Mit Hilfe der Linsengleichung  $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$  folgt mit  $|b| = -b$

$$v = \frac{|b|}{f} + 1 \quad (19)$$

Für die deutliche Sehweite  $|b| = s = 25 \text{ cm}$  gilt

$$v = \frac{s}{f} + 1 = \frac{25}{f} + 1 \stackrel{f \ll s}{\approx} \frac{25}{f} \quad (f \text{ in cm}) \quad (20)$$

### 6.4. Mikroskop

Das Mikroskop besteht im Prinzip aus zwei Sammellinsen, dem Objektiv  $L_1$  und dem Okular  $L_2$ , deren Abstand voneinander wesentlich größer als die Summe

ihrer Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  ist. Den Abstand der benachbarten Brennpunkte von Objektiv und Okular bezeichnet man als optische Tubuslänge  $\Delta$ .

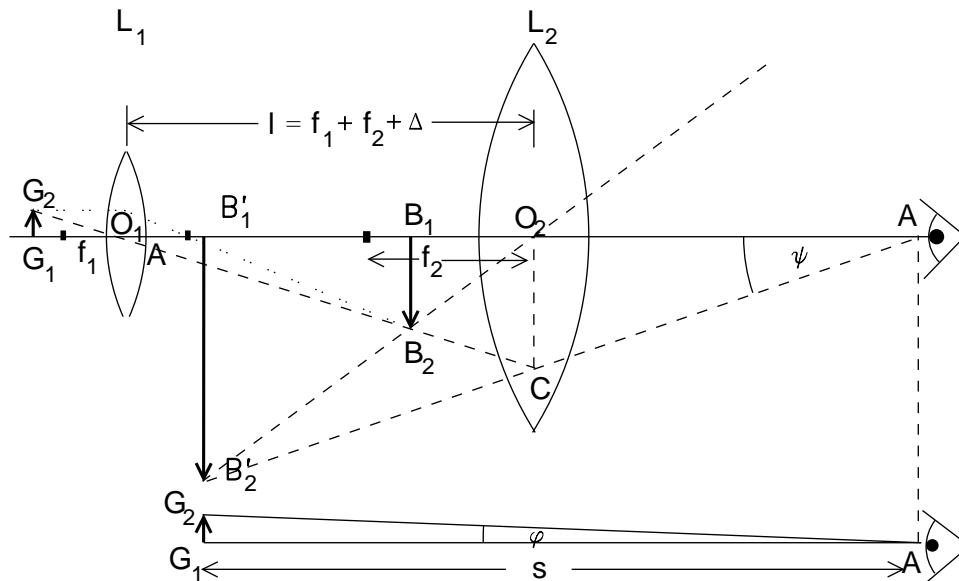


ABB. 16 Mikroskop

Der zu betrachtende Gegenstand liegt dicht vor dem Brennpunkt  $F_1$  des Objektivs  $L_1$ . Dieses erzeugt ein umgekehrtes, reelles Zwischenbild  $B_1B_2$  innerhalb der einfachen Brennweite des Okulars  $L_2$ . Dieses Zwischenbild wird mit dem Okular  $L_2$  als Lupe betrachtet.

In guter Näherung kann man das Bild  $A$  des Mikroskops im Zentrum des Okulars ( $A \approx O_2$ ) und das Zwischenbild  $B_1B_2$  im Brennpunkt des Okulars annehmen.

Somit gilt:

$$\tan \psi \approx \frac{\overline{B_1B_2}}{f_2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi \approx \frac{\overline{G_1G_2}}{s}$$

Daraus folgt für die Vergrößerung

$$v = \frac{\overline{B_1B_2} \cdot s}{f_2 \cdot \overline{G_1G_2}}$$

Der Strahlensatz liefert die Beziehung:

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{G_1G_2}} \approx \frac{1 - f_2}{g}$$

## 6 Optische Instrumente

Die Linsengleichung für das Objektiv  $L_1$  liefert:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{l - f_2} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow g = \frac{f_1 \cdot (l - f_2)}{\Delta}$$

Damit gilt für die Vergrößerung des Mikroskops:

$$v = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi} = \frac{s \cdot \Delta}{f_1 \cdot f_2} \quad (21)$$

### 6.5. Fernrohre

Sie sollen ferne Gegenstände unter größeren Seh winkeln erscheinen lassen, als sie mit dem freien Auge erblickt werden.

Da die von sehr fernen Gegenständen kommenden Strahlen annähernd parallel ins Auge fallen, werden sie ohne Akkomodation des Auges zu einem Bild auf der Netzhaut vereinigt.

Die parallel ins Fernrohr einfallenden Strahlen müssen dieses auch wieder parallel verlassen, damit das Auge ebenfalls nicht zu akkomodieren braucht. Dies wird erreicht, indem man den hinteren Brennpunkt des Objektivs mit dem vorderen Brennpunkt des Okulars zusammenfallen lässt.

#### 6.5.1. Galileisches Fernrohr oder Holländisches Fernrohr

Objektiv: Sammellinse; Okular: Zerstreuungslinse

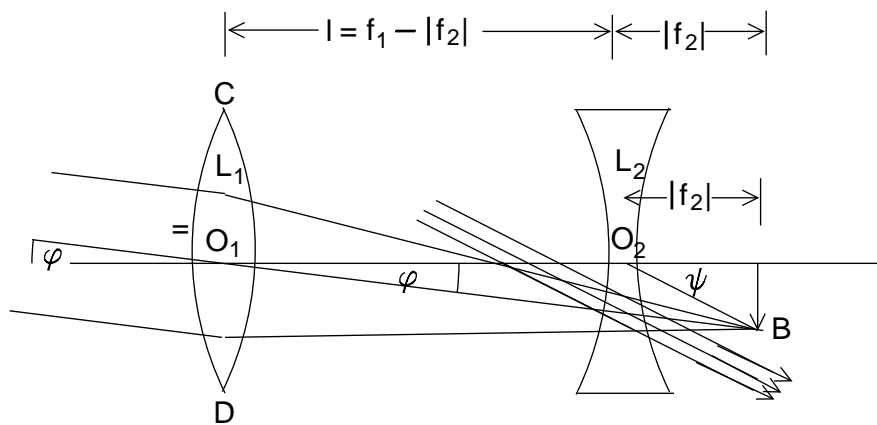


ABB. 17 GalileiFernrohr

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\overline{BF_2}}{\overline{F_2O_2}}; & \tan \varphi &= \frac{\overline{BF_2}}{\overline{F_2O_1}} \\ |v| &= \frac{\tan \psi}{\tan \varphi} = \frac{\overline{F_2O_1}}{\overline{F_2O_2}} = \frac{\ell + |f_2|}{|f_2|} = \frac{f_1}{|f_2|} \end{aligned} \quad (22)$$

Da  $f_2 < 0$  ist, ergibt sich für  $v$  ein negativer Wert.

## 6.5.2. Astronomisches oder Keplersches Fernrohr

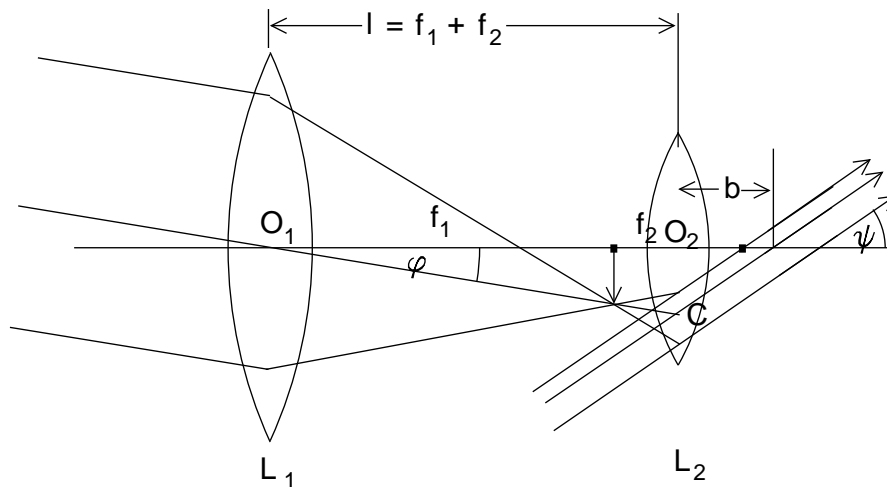


ABB. 18 KeplerFernrohr

Objektiv: langbrennweitige Sammellinse; Okular: kurzbrennweitige Sammellinse

$$\tan \psi = \frac{\overline{CO_2}}{b} \quad \tan \varphi = \frac{\overline{CO_2}}{f_1 + f_2}$$

A ist ein durch das Okular entworfenes Bild von  $O_1$ . Damit ergibt sich mit der Linsengleichung:

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{f_1}{f_2(f_1 + f_2)} \Rightarrow v = \frac{f_1}{f_2} \quad (v > 0) \quad (23)$$

*Hinweis:* Der Sehwinkel zum Gegenstand muss immer vom Ort des Auges aus gemessen werden!

*Einfachere Herleitung:* Da das Zwischenbild in der Brennebene von  $L_2$  entsteht, kann das Auge näherungsweise nach  $O_2$  gelegt werden.

$$\Rightarrow \tan \psi = \frac{\overline{F'_1 B}}{f_2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\overline{F'_1 B}}{f_1} \Rightarrow v = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi} = \frac{f_1}{f_2}$$